OSTWALD'S KLASSIKER
R EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 164.

NEWTON

ABHANDLUNG ÜBER DIE QUADRATUR DER KURVEN

(1704)

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

C... R

DER

EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

8. Gebunden.

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 1. **H. Helmholtz,** Erhalt. der Kraft. (1847.) 7. Taus. (60 S.) *M* —.80.

» 2. **C. F. Gauss,** Allgem. Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfern. wirk. Anziehungs- u. Abstoß.-Kräfte. (1840.) Herausg. v. A. Wangerin. 2. Aufl. (60 S.) *M* —.80.

» 5. —— Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. v. Wangerin. Dritte Auflage. (64 S.) *M* —.80.

» 10. **F. Neumann,** Die mathematischen Gesetze d. inducirten elektrischen Ströme. (1845.) Herausg. v. C. Neumann. (96 S.) *M* 1.50.

» 11. **Galileo Galilei,** Unterred. u. mathem. Demonstrat. über zwei neue Wissenszweige usw. (1638.) 1. Tag m. 13 u. 2. Tag m. 26 Fig. i. Text. Aus d. Ital. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. Zweiter, unveränderter Abdruck. (142 S.) *M* 3.—.

» 14. **C. F. Gauss,** Die 4 Beweise der Zerleg. ganzer algebr. Funktionen usw. (1799—1849.) Hrsg. v. E. Netto. 2. Aufl. Mit 1 Taf. (81 S.) *M* 1.50.

» 17. **A. Bravais,** Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. u. in Gemeinschaft mit P. Groth herausgeg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) *M* 1.—.

» 19. Über die Anzieh. homogener Ellipsoide, Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausgeg. von A. Wangerin. (118 S.) *M* 2.—.

» 24. **Galileo Galilei,** Unterred. u. math. Demonstrat. üb. 2 neue Wissenszweige usw. (1638.) 3. u. 4. Tag, m. 90 Fig. i. Text. Aus d. Ital. u. Lat. übers. u. hrsg. v. A. v. Oettingen. 2. Aufl. (141 S.) *M* 2.—.

» 25. —— Anh. z. 3. u. 4. Tag, 5. u. 6 Tag, mit 23 Fig. im Text. Aus d. Ital. u. Latein. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. 2., unveränderter Abdruck. (66 S.) *M* 1.20.

» 36. **F. Neumann,** Theorie inducirter elektr. Ströme. (1847.) Herausgeg. von C. Neumann. Mit 10 Fig. im Text. (96 S.) *M* 1.50.

» 46. Abhandlg. über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696); **Jac. Bernoulli** (1697) u. **Leonhard Euler** (1744). Herausg. v. P. Stäckel. Mit 19 Textfig. (144 S.) *M* 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgeg. von P. Stäckel Mit 12 Textfiguren. (110 S.) *M* 1.60.

» 53. **C. F. Gauss,** Die Intensität der erdmagnet. Kraft auf absolutes Maß zurückgeführt. Herausgeg. von E. Dorn. (62 S.) *M* 1.—.

» 54. **J. H. Lambert,** Anmerk. und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. (1772.) Herausg. v. A. Wangerin. Mit 21 Textfiguren. (96 S.) *M* 1.60.

Nr. 55. **Lagrange** und **Gauss**, Kartenprojection. (1779 u. 1822.) Herausg. von A. Wangerin. Mit 2 Textfiguren. (102 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner**, Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten u. zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 61. **G. Green**, Versuch, die math. Analysis auf die Theorien d. Elektric. u. des Magnetismus anzuwenden. (1828.) Herausgegeben von A. v. Oettingen und A. Wangerin. (140 S.) ℳ 1.80.

» 64. **C. G. J. Jacobi**, Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abelschen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain**, Abhandl. über die Functionen zweier Variabler mit 4 Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel**, Entwurf einer Theorie der Abelschen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 69. **James Clerk Maxwell**, Über Faradays Kraftlinien. (1855 u. 1856.) Herausgegeben von L. Boltzmann. (130 S.) ℳ 2.—.

» 71. **N. H. Abel**, Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdot\cdot$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler**, Zwei Abhandlg. über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Latein. übersetzt u. herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Fig. im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 75. **Axel Gadolin**, Abhandlg. über die Herleitung aller krystallograph. Systeme mit ihren Unterabtheil. aus einem einzigen Prinzipe. (Gelesen den 19. März 1867.) Deutsch herausgeg. von P. Groth. Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. (92 S.) ℳ 1.50.

» 76. **F. E. Neumann**, Theorie der doppelt. Strahlenbrech., abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik. (1832.) Herausg. v. A. Wangerin. (52 S.) ℳ —.80.

» 77. **C. G. J. Jacobi**, Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus determinantium.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

» 78. —— Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 79. **H. v. Helmholtz**, 2 hydrodynamische Abhandlungen. I. Über Wirbelbewegungen. (1858.) — II. Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. (1868.) Herausgeg. von A. Wangerin. (80 S.) ℳ 1.20.

» 80. —— Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. (1859.) Herausgeg. von A. Wangerin. (132 S.) ℳ 2.—.

» 82. **Jacob Steiner**, Systemat. Entwickl. der Abhängigkeit geometr. Gestalten voneinander, mit Berücksichtig. der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie d. Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität usw. (1832.) I. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Textfiguren. (126 S.) ℳ 2.—.

Alexander Ziwet

Newtons
Abhandlung über die Quadratur der Kurven.

(1704)

Aus dem Lateinischen übersetzt

und herausgegeben von

Dr. Gerhard Kowalewski
a. o. Professor an der Universität Bonn

Mit 8 Textfiguren

Leipzig
Verlag von Wilhelm Engelmann
1908



Abhandlung über die Quadratur der Kurven.

Einleitung zur Quadratur der Kurven.

1. Ich betrachte hier die mathematischen Größen nicht als aus äußerst kleinen Teilen bestehend, sondern als durch stetige Bewegung beschrieben[1]. Linien werden beschrieben und im Beschreiben erzeugt nicht durch Aneinandersetzen von Teilen, sondern durch stetige Bewegung von Punkten; Flächen durch Bewegung von Linien; Körper durch Bewegung von Flächen; Winkel durch Rotation von Seiten; Zeiten durch stetiges Fließen; und ebenso ist es in andern Fällen. Diese Erzeugungen finden in der Natur tatsächlich statt, und man kann sie täglich bei der Bewegung der Körper beobachten. Auf diese Weise lehrten auch die Alten die Erzeugung von Rechtecken, indem sie bewegliche Geraden an unbeweglichen Geraden entlang führten.

2. Indem ich nun in Betracht zog, daß in gleichen Zeiten wachsende und wachsend erzeugte Größen je nach der größeren oder kleineren Geschwindigkeit, mit der sie wachsen und erzeugt werden, größer oder kleiner ausfallen, suchte ich nach einer Methode zur Bestimmung der Größen aus der Geschwindigkeit der Bewegung oder des Wachsens, wodurch sie erzeugt werden. Diese Bewegungs- oder Wachstumsgeschwindigkeiten nannte ich Fluxionen, und die erzeugten Größen nannte ich Fluenten, und ich kam allmählich in den Jahren 1665 und 1666 auf die Fluxionsmethode, die ich hier bei der Quadratur der Kurven benutzt habe.

3. Die Fluxionen verhalten sich äußerst genau wie die in äußerst kleinen gleichen Zeitteilchen erzeugten Zunahmen der Fluenten, und sie stehen, um genau zu reden, im ersten Verhältnis der eben beginnenden Zunahmen. Sie können aber durch irgend welche Linien dargestellt werden, die zu ihnen proportional sind.

4. Es mögen z. B. die Flächen ABC, $ABDG$ von den Ordinaten BC, BD beschrieben werden, die auf der Basis AB

in gleichförmiger Bewegung fortrücken. Dann werden die Fluxionen dieser Flächen sich zueinander verhalten wie die beschreibenden Ordinaten BC und BD, und man kann sie durch jene Ordinaten darstellen, weil jene Ordinaten sich verhalten wie die eben beginnenden Zunahmen der Flächen.

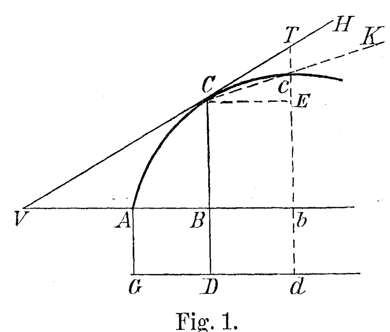


Fig. 1.

Die Ordinate BC rücke von ihrem Platz BC nach irgend einem neuen Platz bc. Man vollende das Parallelogramm $BCEb$ und ziehe die Gerade VTH, die die Kurve in C berührt und die Verlängerungen von bc und BA in T und V trifft. Dann werden die eben erzeugten Zunahmen der Abszisse AB, der Ordinate BC und der krummen Linie AC folgende sein: Bb, Ec und Cc. Im ersten Verhältnis dieser eben beginnenden Zunahmen stehen die Seiten des Dreiecks CET. Daher verhalten sich die Fluxionen von AB, BC und AC wie die Seiten CE, ET und CT jenes Dreiecks CET, und man kann sie durch eben diese Seiten darstellen oder, was dasselbe ist, durch die Seiten des ähnlichen Dreiecks VBC[2]).

5. Auf dasselbe läuft es hinaus, wenn man die Fluxionen im letzten Verhältnis[3]) der verschwindenden Teile annimmt. Man ziehe die Gerade Cc und verlängere dieselbe bis K. Nun kehre die Ordinate bc nach ihrem früheren Platz BC zurück. Dann wird beim Zusammenrücken der Punkte C und c die Gerade CK mit der Tangente CH zusammenfallen, und das verschwindende Dreieck CEc wird in seiner letzten Gestalt dem Dreieck CET ähnlich werden, und seine verschwindenden Seiten CE, Ec und Cc werden sich zuletzt zueinander verhalten wie die Seiten CE, ET und CT des andern Dreiecks CET. Daher stehen in diesem Verhältnis die Fluxionen der Linien AB, BC und AC. Wenn die Punkte C und c um irgend ein kleines Intervall voneinander entfernt sind, so wird die Gerade CK um ein kleines Intervall von der Tangente CH entfernt sein. Soll die Gerade CK mit der Tangente CH zusammenfallen, und sollen die letzten Verhältnisse der Linien CE, Ec und Cc gefunden werden, so müssen die Punkte

C und c zusammenrücken und gänzlich zusammenfallen. Auch über noch so kleine Irrtümer darf man in mathematischen Dingen nicht hinweggehen.

6. Eine ähnliche Überlegung gilt, wenn ein um den Mittelpunkt B mit dem Radius BC beschriebener Kreis auf der Abszisse AB, zu der er senkrecht ist, in gleichförmiger Bewegung entlang geführt wird. Die Fluxion des erzeugten Körpers ABC wird sich verhalten wie jener erzeugende Kreis und die Fluxionen seiner Oberfläche wie der Umfang jenes Kreises multipliziert mit der Fluxion der krummen Linie AC. Denn in derselben Zeit, in welcher der Körper ABC erzeugt wird, indem man jenen Kreis auf der Abszisse AB entlang führt, wird seine Oberfläche erzeugt, indem man die Peripherie jenes Kreises an der Kurve AC entlang führt. Auch die folgenden Beispiele für diese Methode nehme man an.

7. Die Gerade PB, die sich um den gegebenen Pol P dreht, schneide eine andere ihrer Lage nach gegebene Gerade AB. Gesucht wird das Verhältnis der Fluxionen jener Geraden AB und PB.

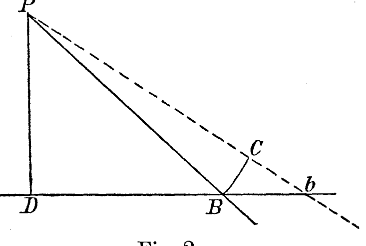


Fig. 2.

Die Gerade PB gehe aus ihrer Lage PB in die neue Lage Pb über. Auf Pb nehme man PC gleich PB und ziehe PD so nach AB, daß der Winkel bPD gleich dem Winkel bBC ist. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke bBC, bPD wird sich die Zunahme Bb zu der Zunahme Cb verhalten wie Pb zu Db. Jetzt kehre Pb in seine frühere Lage PB zurück, so daß jene Zunahmen verschwinden. Dann wird das letzte Verhältnis der verschwindenden, d. h. das letzte Verhältnis von Pb zu Db, dasjenige sein, welches PB zu DB hat, wenn der Winkel PDB ein rechter ist. Daher steht in diesem Verhältnis die Fluxion von AB zu der Fluxion von PB.

8. Die Gerade PB, die sich um den gegebenen Pol P dreht, schneide zwei andere ihrer Lage nach gegebene Geraden AB und AE in B und E. Gesucht wird das Verhältnis der Fluxionen jener Geraden AB und AE.

Die sich drehende Gerade gehe aus ihrer Lage PB in die neue Lage Pb über, wo sie die Geraden AB, AE in den Punkten b und e schneidet, und man ziehe zu der Geraden AE die Parallele BC, die Pb in C trifft. Dann wird sich Bb zu BC verhalten wie Ab zu Ae und BC zu Ee wie PB zu PE und, wenn man die Verhältnisse multipliziert, Bb zu Ee wie $Ab \times PB$ zu $Ae \times PE$. Jetzt kehre die Linie Pb in ihre frühere Lage PB zurück. Dann wird die verschwindende Zunahme Bb sich zu der verschwindenden Zunahme Ee verhalten wie $AB \times PB$ zu $AE \times PE$. Daher steht in diesem Verhältnis die Fluxion der Geraden AB zu der Fluxion der Geraden AE.

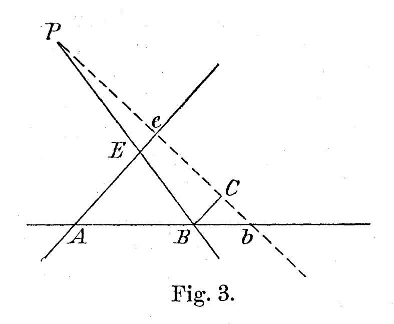


Fig. 3.

9. Wenn nun die sich drehende Gerade PB irgend zwei ihrer Lage nach gegebene krumme Linien in den Punkten B und E schneidet und die jetzt beweglichen Geraden AB, AE jene Kurven in den Schnittpunkten B und E berühren, so wird sich die Fluxion der Kurve, die die Gerade AB berührt, zu der Fluxion der Kurve, die die Gerade AE berührt verhalten wie $AB \times PB$ zu $AE \times PE$. Das wird auch eintreten, wenn die Gerade PB eine beliebige ihrer Lage nach gegebene Kurve beständig in dem beweglichen Punkte P berührt.

10. Die Grösse x möge gleichförmig fließen, und es sei die Fluxion der Größe x^n zu finden.

In der Zeit, in der x beim Fließen zu $x + o$ wird, wird x^n zu $(x + o)^n$, d. h. nach der Methode der unendlichen Reihen zu

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2 x^{n-2} + \text{ usw.}$$

Die Zunahmen

$$o \text{ und } nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2 x^{n-2} + \text{ usw.}$$

verhalten sich zueinander wie:

$$1 \text{ zu } nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} ox^{n-2} + \text{ usw.}$$

Nun mögen jene Zunahmen verschwinden. Dann wird ihr letztes Verhältnis 1 zu nx^{n-1} sein. Es verhält sich daher die Fluxion der Größe x zu der Fluxion der Größe x^n wie 1 zu nx^{n-1}.

11. Durch ähnliche Überlegungen lassen sich mittels der Methode der ersten und letzten Verhältnisse die Fluxionen der Linien, sei es der geraden, sei es der krummen, in beliebigen Fällen gewinnen, sowie auch die Fluxionen der Oberflächen, der Winkel und anderer Größen. Es harmoniert aber mit der Geometrie der Alten, die Analysis in dieser Weise in endlichen Größen anzustellen und von endlichen Größen, die eben beginnen oder verschwinden, die ersten oder letzten Verhältnisse aufzuspüren. Und ich wollte zeigen, daß es bei der Fluxionsmethode nicht nötig ist, unendlich kleine Figuren in die Geometrie einzuführen. Man kann freilich die Analysis bei beliebigen Figuren durchführen, seien es endliche oder unendlich kleine, die man sich verschwindenden Figuren ähnlich denkt, sowie auch bei Figuren, die nach den Methoden der Indivisibilien für unendlich klein gehalten zu werden pflegen. Nur muß man vorsichtig zu Werke gehen.

12. Aus den Fluxionen die Fluenten zu finden[4]), ist ein schwierigeres Problem, und der erste Schritt der Lösung ist mit der Quadratur der Kurven gleichbedeutend. Über diese habe ich vor langer Zeit folgendes geschrieben.

Über die Quadratur der Kurven.

Die unbestimmten Größen betrachte ich im folgenden als in stetiger Bewegung wachsend oder abnehmend, d. h. als fließend oder abfließend. Und ich bezeichne sie mit den Buchstaben z, y, x, v, und ihre Fluxionen oder Wachstumsgeschwindigkeiten drücke ich durch dieselben Buchstaben mit Punkten versehen aus, also durch $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$[5]). Von diesen Fluxionen gibt es wieder Fluxionen oder mehr oder weniger rasche Änderungen. Man kann sie die zweiten Fluxionen von z, y, x, v nennen und so bezeichnen: $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$; die ersten Fluxionen hiervon oder die dritten Fluxion von z, y, x, v so: $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$; die vierten so: $\ddddot{z}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{v}$. Wie nun $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$ die Fluxionen der Größen $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$ sind, diese die Fluxionen der Größen $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$ und diese die Fluxionen der ersten Größen z, y, x, v, so können diese Größen als die Fluxionen anderer betrachtet werden, die ich so bezeichnen werde: $\overset{|}{z}$, $\overset{|}{y}$, $\overset{|}{x}$, $\overset{|}{v}$, diese als die

Fluxionen anderer $\overset{||}{z}$, $\overset{||}{y}$, $\overset{||}{x}$, $\overset{||}{v}$ und diese als die Fluxion anderer $\overset{|||}{z}$, $\overset{|||}{y}$, $\overset{|||}{x}$, $\overset{|||}{v}$. Es bezeichnen also $\overset{||}{z}$, $\overset{|}{z}$, z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$, $\dddot{z}$, $\ddddot{z}$, $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{z}$ usw. eine Reihe von Größen, von denen jede spätere die Fluxion der vorhergehenden ist und jede frühere eine Fluente, welche die folgende als Fluxion hat. Eine solche ist die Reihe

$$\overset{||}{\overline{\sqrt{az-zz}}},\ \overset{|}{\overline{\sqrt{az-zz}}},\ \sqrt{az-zz},\ \overset{\cdot}{\overline{\sqrt{az-zz}}},\ \overset{\cdot\cdot}{\overline{\sqrt{az-zz}}},\ \overset{\cdot\cdot\cdot}{\overline{\sqrt{az-zz}}},$$

sowie auch die Reihe

$$\overset{||}{\frac{az+zz}{a-z}}\quad \overset{|}{\frac{az+zz}{a-z}}\quad \frac{az+zz}{a-z}\quad \overset{\cdot}{\frac{az+zz}{a-z}}\quad \overset{\cdot\cdot}{\frac{az+zz}{a-z}}\quad \overset{\cdot\cdot\cdot}{\frac{az+zz}{a-z}}\,.$$

Es ist zu bemerken, daß in diesen Reihen jede frühere Größe sich verhält wie die Fläche einer krummlinigen Figur, deren rechtwinklige Ordinate die folgende Größe, und deren Abszisse z ist. So ist $\overset{|}{\overline{\sqrt{az-zz}}}$, die Fläche einer Kuvre, deren Ordinate $\sqrt{az-zz}$ und deren Abszisse z ist. Wohin aber dieses alles zielt, wird in den folgenden Paragraphen klar werden.

§ 1. Problem 1.

Wenn eine Gleichung gegeben ist, die irgend eine Anzahl von Fluenten enthält, die Fluxionen zu finden[6]).

Lösung.

Man multipliziere jedes Glied der Gleichung mit dem Exponenten je einer Fluente, die es enthält; und bei den einzelnen Multiplikationen verwandle man einen Faktor der Potenz in seine Fluxion. Dann wird das Aggregat aller Resultate mit ihren eignen Vorzeichen die neue Gleichung sein.

Erklärung.

Es seien a, b, c, d usw. bestimmte und unveränderliche Größen, und es werde irgend eine Gleichung vorgelegt, die die Fluenten z, y, x usw. enthält, wie

$$x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0\,.$$

Man multipliziere die Glieder zunächst mit den Exponenten von x und schreibe bei den einzelnen Multiplikationen für einen

Faktor der Potenz, also für ein x in erster Dimension, $\dot{x}$. Die Summe der Resultate wird dann sein:

$$3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2.$$

Dasselbe geschehe für y, wobei sich ergeben wird:

$$-2xy\dot{y}.$$

Dasselbe geschehe für z, wobei sich ergeben wird:

$$a^2\dot{z}.$$

Die Summe der Resultate setze man gleich Null. Dann erhält man die Gleichung:

$$3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0.$$

Ich behaupte, daß durch diese Gleichung die Beziehung zwischen den Fluxionen definiert wird.

Beweis.

Es sei nämlich o eine ganz kleine Größe, und $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$ seien die Momente der Größen z, y, x, d. h. die gleichzeitigen augenblicklichen Inkremente. Wenn die Fluenten jetzt z, y und x sind, so werden sie nach einem Zeitmoment, um ihre Inkremente $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$ vermehrt, zu $z + o\dot{z}$, $y + o\dot{y}$, $x + o\dot{x}$ werden. Schreibt man diese in der ersten Gleichung anstatt z, y und x, so geben sie die Gleichung:

$$\begin{gathered} x^3 + 3x^2o\dot{x} + 3xo^2\dot{x}^2 + o^3\dot{x}^3 \\ - xy^2 - o\dot{x}y^2 - 2oxy\dot{y} - 2o^2y\dot{x}\dot{y} - o^2x\dot{y}^2 - o^3\dot{x}\dot{y}^2 \\ + a^2z + a^2o\dot{z} - b^3 = 0. \end{gathered}$$

Man ziehe hiervon die frühere Gleichung ab. Dann wird der Rest, durch o dividiert, lauten:

$$\begin{gathered} 3\dot{x}x^2 + 3xo\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3 \\ - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} - 2oy\dot{x}\dot{y} - ox\dot{y}^2 - o^2\dot{x}\dot{y}^2 \\ + a^2\dot{z} = 0. \end{gathered}$$

Nun lasse man die Größe o ins Unendliche abnehmen. Dann wird, wenn man die verschwindenden Glieder vernachlässigt, übrig bleiben:

$$3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0,$$

was zu beweisen war.

Vollständigere Erklärung.

Auf dieselbe Weise würde man, wenn die Gleichung:

$$x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax - yy} - b^3 = 0$$

gegeben wäre, herausbekommen

$$3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{\overline{\sqrt{ax - yy}}} = 0.$$

Wenn man hier die Fluxion $\dot{\overline{\sqrt{ax - yy}}}$ beseitigen will, so setze man:

$$\sqrt{ax - yy} = z.$$

Dann wird sein:

$$ax - y^2 = z^2$$

und nach dem obigen Satze

$$a\dot{x} - 2y\dot{y} = 2z\dot{z} \quad \text{oder} \quad \frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2z} = \dot{z},$$

d. h.:

$$\frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2\sqrt{ax - yy}} = \dot{\overline{\sqrt{ax - yy}}}$$

und daher:

$$3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + \frac{a^3\dot{x} - 2a^2y\dot{y}}{2\sqrt{ax - yy}} = 0.$$

Durch Wiederholung der Operation geht man weiter zu den zweiten, den dritten und den folgenden Fluxionen. Die Gleichung sei:

$$zy^3 - z^4 + a^4 = 0.$$

Dann entsteht durch die erste Operation:

$$\dot{z}y^3 + 3zy^2\dot{y} - 4z^3\dot{z} = 0,$$

durch die zweite:

$$\ddot{z}y^3 + 6\dot{z}y^2\dot{y} + 6zy\dot{y}^2 + 3zy^2\ddot{y} - 12z^2\dot{z}^2 - 4z^3\ddot{z} = 0,$$

durch die dritte:

$$\dddot{z}y^3 + 9\ddot{z}y^2\dot{y} + 18\dot{z}y\dot{y}^2 + 9\dot{z}y^2\ddot{y} + 3zy^2\dddot{y} + 18zy\dot{y}\ddot{y} + 6z\dot{y}^3 \\ - 4z^3\dddot{z} - 36z^2\dot{z}\ddot{z} - 24z\dot{z}^3 = 0.$$

Wenn man aber in dieser Weise zu den zweiten, den dritten und den folgenden Fluxionen weitergeht, so ist es zweckmäßig, irgend eine Größe als gleichförmig fließend zu betrachten und für ihre erste Fluxion die Einheit zu schreiben,

für die zweite Fluxion aber und für die folgenden Null. Die Gleichung sei wie oben:

$$zy^3 - z^4 + a^4 = 0,$$

und z fließe gleichförmig. Dann entsteht durch die erste Operation:

$$y^3 - 3zy^2\dot{y} - 4z^3 = 0,$$

durch die zweite:

$$6y^2\dot{y} + 6zy\dot{y}^2 + 3zy^2\ddot{y} - 12z^2 = 0,$$

durch die dritte:

$$18y\dot{y}^2 + 9y^2\ddot{y} + 3zy^2\dddot{y} + 18zy\dot{y}\ddot{y} + 6z\dot{y}^3 - 24z = 0.$$

Bei Gleichungen dieser Art ist aber zu bemerken, daß die Fluxionen in den einzelnen Gliedern von derselben Ordnung sind, d. h. entweder alle von der ersten Ordnung:

$$\dot{y},\ \dot{z},$$

oder alle von der zweiten:

$$\ddot{y},\ \dot{y}^2,\ \dot{y}\dot{z},\ \dot{z}^2,\ \ddot{z}$$

oder alle von der dritten:

$$\dddot{y},\ \ddot{y}\dot{y},\ \ddot{y}\dot{z},\ \dot{y}^3,\ \dot{y}^2\dot{z},\ \dot{y}\dot{z}^2,\ \dot{z}^3,\ \dot{y}\ddot{z},\ \dot{z}\ddot{z},\ \dddot{z}$$

usw. Wo die Sache sich anders verhält, ist die Ordnung durch hinzugedachte Fluxionen einer gleichförmig fließenden Größe zu vervollständigen. So wird die letzte Gleichung durch Vervollständigung der dritten Ordnung[7]):

$$18y\dot{y}^2\dot{z} + 9y^2\ddot{y}\dot{z} + 3zy^2\dddot{y} + 18zy\dot{y}\ddot{y} + 6z\dot{y}^3 - 24z\dot{z}^3 = 0.$$

§ 2. Problem 2.

Kurven zu finden, die sich quadrieren lassen.

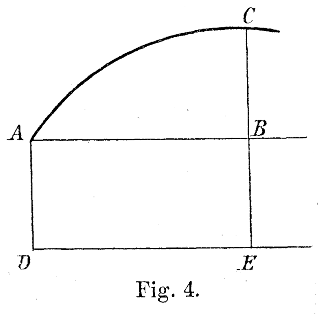


Fig. 4.

ABC sei die zu findende Figur, BC die rechtwinklige Ordinate und AB die Abszisse. Man verlängere CB bis E, so daß $BE = 1$ wird, und vollende das Rechteck $ABED$. Dann werden sich die Fluxionen der Flächen ABC, $ABED$ verhalten wie BC und BE. Man nehme also irgend eine Gleichung an, durch welche die Beziehung zwischen den Flächen definiert wird. Daraus wird

sich dann die Beziehung zwischen den Ordinaten BC und BE mittels des § 1 ergeben, was zu finden war.

Hierfür hat man Beispiele in den folgenden beiden Paragraphen.

§ 3. Theorem 1.

Wenn man für die Abszisse AB und die Fläche AE oder $AB \times 1$ ohne Unterschied z schreibt, und wenn man für $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} +$ usw. R schreibt, die Fläche der Kurve aber $z^{\vartheta} R^{\lambda}$ ist, so wird die Ordinate BC gleich

$$\{\vartheta e + (\vartheta + \lambda\eta) f z^{\eta} + (\vartheta + 2\lambda\eta) g z^{2\eta} + (\vartheta + 3\lambda\eta) h z^{3\eta} + \text{usw.}\} z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1}$$

sein.

Beweis.

Wenn nämlich

$$z^{\vartheta} R^{\lambda} = v$$

ist, so wird (nach § 1)

$$\vartheta \dot{z} z^{\vartheta - 1} R^{\lambda} + \lambda z^{\vartheta} \dot{R} R^{\lambda - 1} = \dot{v}.$$

Für R^{λ} im ersten Gliede der Gleichung und z^{ϑ} im zweiten schreibe man $RR^{\lambda-1}$ und $zz^{\vartheta-1}$. Dann wird $\vartheta \dot{z} R + \lambda z \dot{R}$ mal $z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1}$ gleich $\dot{v}$. Es war aber:

$$R = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} + \text{usw.},$$

und es wird daher (nach § 1):

$$\dot{R} = \eta f \dot{z} z^{\eta - 1} + 2\eta g \dot{z} z^{2\eta - 1} + 3\eta h \dot{z} z^{3\eta - 1} + \text{usw.}$$

Setzt man diese Werte ein und schreibt BE oder 1 für $\dot{z}$, so wird:

$$\{\vartheta e + (\vartheta + \lambda\eta) f z^{\eta} + (\vartheta + 2\lambda\eta) g z^{2\eta} + (\vartheta + 3\lambda\eta) h z^{3\eta} + \text{usw.}\} z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1} = BC,$$

was zu beweisen war.

§ 4. Theorem 2.

Wenn AB, die Abzisse der Kurve, z ist, und wenn man für $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} +$ usw. R und für $k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} +$ usw. S schreibt, die Fläche der Kurve aber $z^{\vartheta} R^{\lambda} S^{\mu}$ ist, so wird die Ordinate BC gleich:

$$\left\{\begin{array}{r} \vartheta ek + (\vartheta + \lambda\eta) fkz^{\eta} + (\vartheta + 2\lambda\eta) gkz^{2\eta} + \cdots \\ + (\vartheta + \mu\eta) elz^{\eta} + (\vartheta + \lambda\eta + \mu\eta) flz^{2\eta} + \cdots \\ (\vartheta + 2\mu\eta) emz^{2\eta} + \cdots \end{array}\right\} z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1} S^{\mu - 1}$$

sein.

Bewiesen wird dies in der Weise des vorigen Paragraphen.

§ 5. Theorem 3.

Wenn AB, die Abszisse der Kurve, z ist, und man für $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} +$ usw. R schreibt, die Ordinate aber

$$z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}(a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} + \text{usw.})$$

ist, und man setzt:

$$\frac{\vartheta}{\eta} = r, \quad r + \lambda = s, \quad s + \lambda = t, \quad t + \lambda = v \text{ usw.},$$

so wird die Fläche gleich $z^{\vartheta}R^{\lambda}$ mal

$$\frac{\frac{1}{\eta}a}{re} + \frac{\frac{1}{\eta}b - sfA}{(r+1)e}z^{\eta} + \frac{\frac{1}{\eta}c - (s+1)fB - tgA}{(r+2)e}z^{2\eta}$$
$$+ \frac{\frac{1}{\eta}d - (s+2)fC - (t+1)gB - vhA}{(r+3)e}z^{3\eta} + \text{usw.}$$

sein.

Dabei bedeuten A, B, C, D usw. die vollständigen Koeffizienten, wie sie bei den einzelnen Gliedern in der Reihe auftreten, mit ihren Zeichen $+$ oder $-$, nämlich:

A den Koeffizienten des ersten Gliedes,

$$\frac{\frac{1}{\eta}a}{re},$$

B den Koeffizienten des zweiten Gliedes,

$$\frac{\frac{1}{\eta}b - sfA}{(r+1)e},$$

C den Koeffizienten des dritten Gliedes,

$$\frac{\frac{1}{\eta}c - (s+1)fB - tgA}{(r+3)e},$$

D den Koeffizienten des vierten Gliedes,

$$\frac{\frac{1}{\eta}d - (s+2)fC - (t+1)gB - vhA}{(r+2)e}$$

und so fort.

Beweis.[8])

Es seien nach dem dritten Paragraphen die Ordinaten der Kurven und die entsprechenden Flächen folgende:

Ordinaten der Kurven.

1. $\{\vartheta e A + (\vartheta + \lambda\eta) f A z^{\eta} + (\vartheta + 2\lambda\eta) g A z^{2\eta} + (\vartheta + 3\lambda\eta) h A z^{3\eta} + \text{usw.}\} z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1}$
2. $\{(\vartheta + \eta) e B z^{\eta} + (\vartheta + \eta + \lambda\eta) f B z^{2\eta} + (\vartheta + \eta + 2\lambda\eta) g B z^{3\eta} + \text{usw.}\} z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1}$
3. $\{(\vartheta + 2\eta) e C z^{2\eta} + (\vartheta + 2\eta + \lambda\eta) f C z^{3\eta} + \text{usw.}\} z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1}$
4. $\{(\vartheta + 3\eta) e D z^{3\eta} + \text{usw.}\} z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1}$

. . . .

Entsprechende Flächen.

1. $A z^{\vartheta} R^{\lambda}$,
2. $B z^{\vartheta + \eta} R^{\lambda}$,
3. $C z^{\vartheta + 2\eta} R^{\lambda}$,
4. $D z^{\vartheta + 3\eta} R^{\lambda}$,

. . . . . .

Setzt man die Summe der Ordinaten gleich der Ordinate

$$(a + b z^{\eta} + c z^{2\eta} + d z^{3\eta} + \text{usw.}) z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1},$$

so wird die Summe der Flächen

$$(A + B z^{\eta} + C z^{2\eta} + D z^{3\eta} + \text{usw.}) z^{\vartheta} R^{\lambda}$$

gleich der Fläche der Kurve sein, deren Ordinate jene ist. Man setze daher die entsprechenden Glieder der Ordinaten gleich. Dann wird

$$a = \vartheta e A,$$
$$b = (\vartheta + \lambda\eta) f A + (\vartheta + \eta) e B,$$
$$c = (\vartheta + 2\lambda\eta) g A + (\vartheta + \eta + \lambda\eta) f B + (\vartheta + 2\eta) e C$$

usw.

und daher

$$A = \frac{a}{\vartheta e},$$
$$B = \frac{b - (\vartheta + \lambda\eta) f A}{(\vartheta + \eta) e},$$
$$C = \frac{c - (\vartheta + 2\lambda\eta) g A - (\vartheta + \eta + \lambda\eta) f B}{(\vartheta + 2\eta) e}$$

und so fort ins Unendliche.

Jetzt setze man

$$\frac{\vartheta}{\eta} = r, \quad r + \lambda = s, \quad s + \lambda = t \text{ usw.}$$

und schreibe in der Fläche

$$(A + Bz^{\eta} + Cz^{2\eta} + Dz^{3\eta} + \text{usw.})\, z^{\vartheta} R^{\lambda}$$

für A, B, C usw. die gefundenen Werte. Dann wird sich die angegebene Reihe ergeben, was zu beweisen war.

1. Es ist zu bemerken, daß jede Ordinate auf zwei Weisen in eine Reihe aufzulösen ist. Denn der Index η kann entweder positiv oder negativ sein. Vorgelegt werde die Ordinate

$$\frac{3k - lz^2}{z^2\sqrt{kz - lz^3 + mz^4}}.$$

Man kann sie entweder so schreiben:

$$z^{-\frac{5}{2}}(3k - lz^2)(k - lz^2 + mz^3)^{-\frac{1}{2}}$$

oder so:

$$z^{-2}(-l + 3kz^{-2})(m - lz^{-1} + kz^{-3})^{-\frac{1}{2}}.$$

Im ersten Falle ist

$$a = 3k, \quad b = o, \quad c = -l, \quad e = k, \quad f = o, \quad g = -l,$$
$$h = m, \quad \lambda = \tfrac{1}{2}, \quad \eta = 1, \quad \vartheta - 1 = -\tfrac{5}{2}, \quad \vartheta = -\tfrac{3}{2} = r,$$
$$s = -1, \quad t = -\tfrac{1}{2}, \quad v = o.$$

Im zweiten Falle ist

$$a = -l, \quad b = o, \quad c = 3k, \quad e = m, \quad f = -l, \quad g = o,$$
$$h = k, \quad \lambda = \tfrac{1}{2}, \quad \eta = -1, \quad \vartheta - 1 = -2, \quad \vartheta = -1,$$
$$r = 1, \quad s = 1\tfrac{1}{2}, \quad t = 2, \quad v = 2\tfrac{1}{2}.$$

Jeder der beiden Fälle muß versucht werden. Und wenn eine der beiden Reihen wegen schließlich mangelnder Glieder abbricht und ein Ende erreicht, so hat man die Fläche der Kurve in endlicher Form. So verschwinden, wenn man im ersten Falle dieses Beispiels in der Reihe die Werte von a, q, c, e, f, g, h, λ, ϑ, r, s, t, v einträgt, alle Glieder hinter dem ersten bis ins Unendliche, und es ergibt sich als Fläche der Kurve [9])

$$-2\sqrt{\frac{k - lz^2 + mz^3}{z^3}}.$$

Und diese Fläche liegt wegen des negativen Zeichens an der über die Ordinate hinaus verlängerten Abszisse. Denn jede positive Fläche liegt sowohl an der Abszisse als auch an der Ordinate. Eine negative jedoch fällt auf die entgegengesetzte Seite der Ordinate und liegt an der verlängerten Abszisse; dabei bleibt natürlich das Zeichen der Ordinate erhalten. Auf diese Weise erreicht eine der beiden Reihen und manchmal jede von ihnen immer ein Ende und wird endlich, wenn die Kurve geometrisch quadriert werden kann. Wenn dagegen die Kurve eine solche Quadratur nicht zuläßt, so wird jede der beiden Reihen ins Unendliche fortlaufen, und eine von ihnen wird konvergieren und die Fläche näherungsweise liefern, außer im Falle r (wegen Unendlichkeit der Fläche) entweder Null ist oder eine negative ganze Zahl, oder im Falle $\frac{z^\eta}{e}$ der Einheit gleich ist. Wenn $\frac{z^\eta}{e}$ kleiner als die Einheit ist, so wird die Reihe konvergieren, bei der der Index η positiv ist. Wenn aber $\frac{z^\eta}{e}$ größer als die Einheit ist, so wird die andere Reihe konvergieren. Wenn in dem einen Falle die Fläche an der bis zur Ordinate gezogenen Abszisse liegt, wird sie in dem andern an der über die Ordinate hinaus verlängerten Abszisse liegen.

2. Man bemerke überdies folgendes. Wenn die Ordinate das Produkt aus einem rationalen Faktor Q und einem irreduziblen irrationalen Faktor R^π ist und die Basis R des irrationalen Faktors in dem rationalen Faktor Q nicht als Teiler enthalten ist, so wird $\lambda - 1 = \pi$ und $R^{\lambda-1} = R^\pi$ sein. Wenn aber die Basis R des irrationalen Faktors ein einfacher Teiler des rationalen Faktors ist, so wird $\lambda - 1 = \pi + 1$ und $R^{\lambda-1} = R^{\pi+1}$ sein. Ist sie ein zweifacher Teiler, so wird $\lambda - 1 = \pi + 2$ und $R^{\lambda-1} = R^{\pi+2}$ sein, ist sie ein dreifacher, so wird $\lambda - 1 = \pi + 3$ und $R^{\lambda-1} = R^{\pi+3}$ sein und so fort.

3. Wenn die Ordinate ein irreduzibler rationaler Bruch ist mit einem aus zwei oder mehr Gliedern zusammengesetzten Nenner, so muß man den Nenner in alle seine Primteiler auflösen. Und wenn ein Teiler da ist, dem kein anderer gleich ist, so läßt sich die Kurve nicht quadrieren[10]). Wenn aber zwei oder mehr Teiler gleich sind, so ist einer von ihnen fortzuwerfen, und wenn noch zwei oder mehr andere einander gleich und den früheren ungleich sind, so ist auch von ihnen einer fortzuwerfen, und ebenso muß man es bei allen gleichen

Teilern machen, wenn noch mehr solche da sind. Der Teiler, der dann übrig bleibt, oder das Produkt aus allen Teilern, die übrig bleiben, wenn es mehrere sind, ist für R zu setzen[11]) und dessen reziprokes Quadrat R^{-2} für $R^{\lambda-1}$ (außer wenn jenes Produkt ein Quadrat oder ein Kubus oder ein Biquadrat ist usw., in welchem Falle seine Basis für R zu setzen ist und der Exponent der Potenz, 2 oder 3 oder 4 usw. negativ genommen für λ), und die Ordinate ist auf den Nenner R^2 oder R^3 oder R^4 oder R^5 usw. zu reduzieren.

4. Die Ordinate sei z. B.[12])

$$\frac{z^5 + z^4 - 8z^3}{z^5 + z^4 - 5z^3 - z^2 + 8z - 4}.$$

Dieser Bruch ist irreduzibel, und der Nenner hat gleiche Teiler, nämlich

$$z - 1, \quad z - 1, \quad z - 1 \text{ und } z + 2, \quad z + 2.$$

Ich werfe also einen Teiler von jeder Größe fort und setze das Produkt der übrigen

$$z - 1, \quad z - 1, \quad z + 2,$$

also

$$z^3 - 3z + 2$$

für R und das reziproke Quadrat hiervon $\frac{1}{R^2}$ oder R^{-2} für $R^{\lambda-1}$. Dann reduziere ich die Ordinate auf den Nenner R^2 oder $R^{1-\lambda}$, und es ergibt sich

$$\frac{z^6 - 9z^4 + 8z^3}{(z^3 - 3z + 2)^2}$$

d. h.

$$z^3(8 - 9z + z^3)(2 - 3z + z^3)^{-2}.$$

Es ist daher

$$\begin{gathered} a = 8, \quad b = -9, \quad c = o, \quad d = 1, \\ e = 2, \quad f = -3, \quad g = o, \quad h = 1, \\ \lambda - 1 = -2, \quad \lambda = -1, \quad \eta = 1, \quad \vartheta - 1 = 3, \\ \vartheta = 4 = r, \quad s = 3, \quad t = 2, \quad v = 1. \end{gathered}$$

Trägt man diese Werte in die Reihe ein, so ergibt sich für die Fläche

$$\frac{z^4}{z^3 - 3z + 2}.$$

Es verschwinden nämlich in der ganzen Reihe alle Glieder nach dem ersten.

5. Wenn endlich die Ordinate ein irreduzibler Bruch ist und dessen Nenner das Produkt aus einem rationalen Faktor Q und einem irreduziblen irrationalen Faktor R^{π}, so muß man alle Primteiler der Basis R finden und einen Teiler von jeder Größe fortwerfen. Mit den übrig bleibenden Teilern, wenn es solche gibt, ist der rationale Faktor Q zu multiplizieren. Ist das Resultat gleich der Basis R oder gleich einer Potenz jener Basis, deren Exponent eine ganze Zahl ist, so sei dieser Exponent m. Dann wird $\lambda - 1 = -\pi - m$ und $R^{\lambda-1} = R^{-\pi-m}$.

Die Ordinate sei z. B.

$$\frac{3q^5 - q^4 z + 9q^3 z^2 - q^2 z^3 - 6qz^4}{(q^2 - z^2)(q^3 + q^2 z - qz^2 - z^3)^{\frac{1}{3}}}.$$

Die Basis R oder

$$q^3 + q^2 z - qz^2 - z^3$$

des irrationalen Fators hat die Teiler

$$q + z, \quad q + z, \quad q - z,$$

die von zwei Größen sind. Ich werfe also einen Teiler von jeder Größe fort, und mit dem Teiler $q + z$, der übrig bleibt, multipliziere ich den rationalen Faktor $q^2 - z^2$. Das Resultat

$$q^3 + q^2 z - qz^2 - z^3$$

ist gleich der Basis R. Ich setze also $m = 1$, und es wird dann, weil π gleich $\frac{1}{3}$ ist, $\lambda - 1 = -\frac{4}{3}$. Ich reduziere daher die Ordinate auf den Nenner $R^{\frac{4}{3}}$, und es ergibt sich

$$z^0 (3q^6 + 2q^5 z + 8q^4 z^2 + 8q^3 z^3 - 7q^2 z^4 - 6qz^5)$$
$$(q^3 + q^2 z - qz^2 - z^3)^{-\frac{4}{3}}.$$

Mithin ist

$$a = 3q^6, \quad b = 2q^5 \text{ usw.}, \quad e = q^3, \quad f = q^2 \text{ usw.},$$
$$\vartheta - 1 = 0, \quad \vartheta = 1 = \eta, \quad \lambda = -\tfrac{1}{3}, \quad r = 1, \quad s = \tfrac{2}{3},$$
$$t = \tfrac{1}{3}, \quad v = 0.$$

Trägt man diese Werte in die Reihe ein, so ergibt sich für die Fläche

$$\frac{3q^3 z + 3qz^3}{(q^3 + q^2 z - qz^2 - z^3)^{\frac{1}{3}}}.$$

Es verschwinden nämlich in der ganzen Reihe alle Glieder nach dem dritten.

§ 6. Theorem 4.[13])

AB, die Abszisse der Kurve, sei z, und man schreibe für $e + fz^\eta + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} +$ usw. R und für $k + lz^\eta + mz^{2\eta} + nz^{3\eta} +$ usw. S, die Ordinate aber sei

$$z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} (a + bz^\eta + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} + \text{usw.}).$$

Die Produkte der Glieder e, f, g, h usw. mit k, l, m, n usw. seien

$$\begin{matrix} ek, & fk, & gk, & hk & \text{usw.,} \\ el, & fl, & gl, & hl & \text{usw.,} \\ em, & fm, & gm, & hm & \text{usw.,} \\ en, & fn, & gn, & hn & \text{usw.,} \end{matrix}$$

Die numerischen Koeffizienten dieser Produkte seien bezüglich

$$\begin{matrix} \frac{\vartheta}{\eta} = r, & r + \lambda = s, & s + \lambda = t, & t + \lambda = v & \text{usw.,} \\ r + \mu = s', & s + \mu = t', & t + \mu = v', & v + \mu = w' & \text{usw.,} \\ s' + \mu = t'', & t' + \mu = v'', & v' + \mu = w'', & w' + \mu = x'' & \text{usw.,} \\ t'' + \mu = v''', & v'' + \mu = w''', & w'' + \mu = x''', & x'' + \mu = y''' & \text{usw.} \end{matrix}$$

Dann wird die Fläche der Kurve folgende sein:

$$z^\vartheta R^\lambda S^\mu \text{ mal}$$

$$\frac{\frac{1}{\eta} a}{rek} + \frac{\frac{1}{\eta} b - \left\{\begin{matrix} sfk \\ + s'el \end{matrix}\right\} A}{(r+1)ek} z^\eta$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta} c - \left\{\begin{matrix} (s+1)fk \\ + (s'+1)el \end{matrix}\right\} B - \left\{\begin{matrix} tgk \\ + t'fl \\ + t''em \end{matrix}\right\} A}{(r+2)ek} z^{2\eta}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta} d - \left\{\begin{matrix} (s+2)fk \\ + (s'+2)el \end{matrix}\right\} C - \left\{\begin{matrix} (t+1)gk \\ + (t'+1)fl \\ + (t''+1)em \end{matrix}\right\} B - \left\{\begin{matrix} vhk \\ + v'gl \\ + v''fm \\ + v'''en \end{matrix}\right\} A}{(r+3)ek} z^{3\eta}$$

$+$ usw.

Dabei bedeutet A den gegebenen Koeffizienten des ersten Gliedes

$$\frac{\frac{1}{\eta}a}{rek},$$

mit seinem Zeichen + oder —, B den gegebenen Koeffizienten des zweiten Gliedes, C den gegebenen Koeffizienten des dritten Gliedes und so fort. Von den Gliedern a, b, c usw., e, f, g usw., k, l, m usw. kann einer oder auch mehrere fehlen.

Der Satz wird in der Art wie der vorige bewiesen, und die dort gemachten Bemerkungen behalten hier ihre Gültigkeit. Die Reihe derartiger Sätze geht aber ins Unendliche fort, und die Fortsetzung der Reihe liegt auf der Hand[14]).

§ 7. Theorem 5.

Man schreibe wie oben für $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} +$ usw. R und in einer Kurvenordinate, die

$$z^{\vartheta \pm \eta\sigma} R^{\lambda \pm \tau}$$

lautet, mögen ϑ, η, λ, e, f, g usw. gegebene Größen bleiben, und für σ und τ schreibe man der Reihe nach alle ganzen Zahlen. Wenn die Ordinaten Wurzeln aus Binomen enthalten, genügt es, daß die Fläche einer der Kurven gegeben wird, die durch die unendlich vielen so hervorgehenden Ordinaten bezeichnet sind; wenn die Ordinaten Wurzeln aus Trinomen enthalten, so genügt es, daß die Flächen zweier von den Kurven gegeben werden; wenn die Ordinaten Wurzeln aus Quadrinomen sind, so genügt es, daß die Flächen dreier von den Kurven gegeben werden, und so fort ins Unendliche. Ich behaupte, daß dann immer die Flächen aller Kurven gegeben sein werden.

Als Nomina betrachte ich hier alle unter der Wurzel stehenden Glieder, sowohl die fehlenden als auch die vollständigen, deren Exponenten in arithmetischer Reihe sind. So muß man die Ordinate

$$\sqrt{a^4 - ax^3 + x^4}$$

wegen der beiden zwischen a^4 und $-ax^3$ fehlenden Glieder als quinquinomisch betrachten. Dagegen ist

$$\sqrt{a^4 + x^4}$$

binomisch und

$$\sqrt{a^4 + x^4 - \frac{x^8}{a^4}}$$

trinomisch; denn die Reihe schreitet hier nach größeren Differenzen fort.

Der Satz wird so bewiesen:

Fall 1.

Die Ordinaten zweier Kurven seien[15])

$$p z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1} \text{ und } q z^{\vartheta + \eta - 1} R^{\lambda - 1}$$

und die Flächen pA und qB, wobei R die trinomische Größe

$$e + f z^\eta + g z^{2\eta}$$

ist. Da nun nach § 3 $z^\vartheta R^\lambda$ die Fläche der Kurve ist, deren Ordinate

$$\{\vartheta e + (\vartheta + \lambda\eta) f z^\eta + (\vartheta + 2\lambda\eta) g z^{2\eta}\} z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1}$$

ist, so ziehe man die ersten Ordinaten und Flächen von der letzten Ordinate und Fläche ab. Dann bleibt

$$\{\vartheta e - p + [(\vartheta + \lambda\eta) f - q] z^\eta + (\vartheta + 2\lambda\eta) g z^{2\eta}\} z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1}$$

als neue Kurvenordinate und

$$z^\vartheta R^\lambda - pA - qB$$

als Fläche dieser Kurve. Man setze

$$\vartheta e = p \quad \text{und} \quad \vartheta f + \lambda\eta f = q.$$

Dann wird die Ordinate

$$(\vartheta + 2\lambda\eta) g z^{2\eta} . z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1}$$

und die Fläche

$$z^\vartheta R^\lambda - \vartheta e A - (\vartheta f + \lambda\eta f) B.$$

Man dividiere beide durch $\vartheta g + 2\lambda\eta g$ und nenne die entstehende Fläche C. Nimmt man alsdann r beliebig an, so wird rC die Fläche der Kurve sein, deren Ordinate

$$r z^{\vartheta + 2\eta - 1} R^{\lambda - 1}$$

ist. Und wie wir aus den Flächen pA und qB die Fläche rC gefunden haben, die der Ordinate

$$r z^{\vartheta + 2\eta - 1} R^{\lambda - 1}$$

entspricht, so wird es möglich sein, aus den Flächen qB und rC eine vierte Fläche sD zu finden, die der Ordinate

$$s z^{\vartheta + 3\eta - 1} R^{\lambda - 1}$$

entspricht, und so fort ins Unendliche. Und die gleiche Art von Progression führt von den Flächen B und A nach der entgegengesetzten Richtung. Wenn von den Gliedern

$$\vartheta, \quad \vartheta + \lambda\eta \quad \text{und}^{*} \quad \vartheta + 2\lambda\eta$$

eins fehlt, und die Reihe abbricht, so nehme man die Fläche pA als Anfang der einen Progression und die Fläche qB als Anfang der andern Progression, und es ergeben sich dann aus diesen beiden Flächen alle Flächen in jeder der beiden Progressionen[16]. Umgekehrt kann man von zwei andern angenommenen Flächen durch diese Analysis zu den Flächen A und B zurückgehen, so daß aus zwei gegebenen alle übrigen gegeben sind. Das wollten wir erreichen.

Dies ist der Fall von Kurven, bei denen der Exponent ϑ von z durch fortgesetzte Addition oder Subtraktion der Größe η vermehrt oder vermindert wird. Der zweite Fall ist der von Kurven, bei denen der Exponent λ um eine Einheit vermehrt oder vermindert wird.

Fall 2.

Wenn man die Ordinaten

$$p z^{\vartheta - 1} R^{\lambda} \quad \text{und} \quad q z^{\vartheta + \eta - 1} R^{\lambda},$$

denen jetzt die Flächen pA und qB entsprechen sollen, mit

$$R, \text{ d. h. } e + f z^{\eta} + g z^{2\eta}$$

multipliziert und dann wieder durch R dividiert, so werden sie

$$(pe + pfz^{\eta} + pgz^{2\eta}) z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1} \text{ und } (qez^{\eta} + qfz^{2\eta} + qgz^{3\eta}) z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1}.$$

Nun ist (nach § 3) $a z^{\vartheta} R^{\lambda}$ die Fläche der Kurve, deren Ordinate

$$\{\vartheta a e + (\vartheta + \lambda\eta) a f z^{\eta} + (\vartheta + 2\lambda\eta) a g z^{2\eta}\} z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1},$$

und $b z^{\vartheta + \eta} R^{\lambda}$ die Fläche der Kurve, deren Ordinate

$$\{(\vartheta + \eta) b e z^{\eta} + (\vartheta + \eta + \lambda\eta) b f z^{2\eta} + (\vartheta + \eta + 2\lambda\eta) b g z^{3\eta}\} z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1}$$

ist.

Die Summe dieser vier Flächen ist[17]):

$$pA + qB + az^{\vartheta}R^{\lambda} + bz^{\vartheta+\eta}R^{\lambda}$$

und die Summe der entsprechenden Ordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta ae + pe \\ + [(\vartheta + \lambda\eta)af + (\vartheta + \eta)be + pf + qe]z^{\eta} \\ + [(\vartheta + 2\lambda\eta)ag + (\vartheta + \eta + \lambda\eta)bf + pg + qf]z^{2\eta} \\ + [(\vartheta + \eta + 2\lambda\eta)bg + qg]z^{3\eta} \end{array}\right\} \cdot z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}.$$

Wenn man das erste, dritte und vierte Glied einzeln gleich Null setzt, so wird auf Grund des ersten:

$$\vartheta ae + pe = 0 \quad \text{oder} \quad -\vartheta a = p,$$

auf Grund des vierten:

$$-\vartheta b - \eta b - 2\lambda\eta b = q$$

und auf Grund des dritten (wenn man p und q eliminiert):

$$\frac{2ag}{f} = b.$$

Hiernach wird der zweite Koeffizient:

$$\frac{\lambda\eta af^2 - 4\lambda\eta age}{f}.$$

Also ist die Summe der vier Ordinaten:

$$\frac{\lambda\eta af^2 - 4\lambda\eta age}{f} z^{\vartheta+\eta-1}R^{\lambda-1},$$

und die Summe der vier entsprechenden Flächen ist:

$$az^{\vartheta}R^{\lambda} + \frac{2ag}{f}z^{\vartheta+\eta}R^{\lambda} - \vartheta aA - \frac{2\vartheta + 2\eta + 4\lambda\eta}{f}agB.$$

Man dividiere diese Summen durch:

$$\frac{\lambda\eta af^2 - 4\lambda\eta age}{f}.$$

Nennt man den zweiten der beiden Quotienten D, so wird D die Fläche der Kurve sein, deren Ordinate der erste Quotient

$$z^{\vartheta+\eta-1}R^{\lambda-1}$$

ist. Auf dieselbe Weise, läßt sich, indem man alle Glieder der Ordinate außer dem ersten gleich Null setzt, die Fläche der Kurve finden, deren Ordinate

$$z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}$$

ist. Diese Fläche heiße C. Wie aus den Flächen A und B die Flächen C und D gefunden sind, lassen sich aus diesen Flächen C und D zwei andere, E und F, finden, die den Ordinaten

$$z^{\vartheta-1}R^{\lambda-2} \quad \text{und} \quad z^{\vartheta+\eta-1}R^{\lambda-2}$$

entsprechen, und so fort ins Unendliche. Durch die umgekehrte Analysis kann man von den Flächen E und F zu den Flächen C und D und von dort zu den Flächen A und B zurückgehen und zu den andern, die in der Progression folgen. Wenn also der Exponent λ durch fortgesetzte Addition und Subtraktion von Einheiten vermehrt oder vermindert wird, und man aus den Flächen, die den so sich ergebenden Ordinaten entsprechen, zwei ganz einfache erhält, so sind alle andern bis ins Unendliche gegeben. Das wollten wir erreichen.

Fall 3.

Verbindet man diese beiden Fälle und vermehrt oder vermindert irgendwie sowohl den Exponenten ϑ durch fortgesetzte Addition und Subtraktion von η als auch den Exponenten λ durch fortgesetzte Addition und Subtraktion der Einheit, so werden sich die Flächen ergeben, die den einzelnen hervorgehenden Ordinaten entsprechen. Das wollten wir erreichen.

Fall 4.

Eine ähnliche Überlegung gilt, wenn die Ordinate eine Wurzel aus einem Quadrinom enthält, und drei von den Flächen gegeben werden, oder wenn sie aus einem Quinquinom besteht, und vier von den Flächen gegeben werden, und so fort. Es ergeben sich alle Flächen, die sich durch Addieren und Subtrahieren der Zahl η bei dem Exponenten ϑ und der Einheit bei dem Exponenten λ erzeugen lassen. Und ebenso verhält es sich bei den Kurven, wo die Ordinaten binomisch zusammengesetzt sind, und die Fläche einer von diesen Kurven, die geometrisch nicht quadrierbar sind, gegeben wird. Das wollten wir erreichen.

§ 8. Theorem 6.

Man schreibe für

$$e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \text{usw.} \quad \text{und} \quad k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + \text{usw.}$$

R und S, wie oben, und in einer Kurvenordinate, die

$$z^{\vartheta \pm \eta\sigma} R^{\lambda \pm \tau} S^{\mu \pm v}$$

lautet, mögen ϑ, η, λ, μ, e, f, g, k, l, m usw. gegebene Größen bleiben, und für σ, τ und v schreibe man der Reihe nach alle ganzen Zahlen. Wenn die Größen R und S Binome sind, so genügt es, daß die Flächen zweier der Kurven, die durch die so hervorgehenden Ordinaten bezeichnet werden, gegeben sind; wenn R und S zusammen aus fünf Nomina bestehen, so genügt es, daß die Flächen dreier der Kurven gegeben sind, und so fort ins Unendliche. Ich behaupte, daß dann die Flächen aller Kurven gegeben sein werden.

Bewiesen wird dieses in der Weise wie der vorige Satz [18]).

§ 9. Theorem 7.

Die Flächen von zwei Kurven, deren Ordinaten sich umgekehrt verhalten wie die Fluxionen der Abszissen, sind einander gleich.

Es werden nämlich die Produkte aus den Ordinaten und den Fluxionen der Abszissen gleich sein, und die Fluxionen der Flächen verhalten sich wie diese Produkte [19]).

Folgerung 1.

Man nehme irgend eine Beziehung zwischen den Abszissen zweier Kurven an und suche daraus nach § 1 die Beziehung zwischen den Fluxionen der Abszissen. Die Ordinaten setze man umgekehrt proportional zu diesen Fluxionen. Es lassen sich so unendlich viele Kurven finden, deren Flächen einander gleich sind.

Folgerung 2.

So geht nämlich jede Kurve, deren Ordinate folgende ist:

$$z^{\vartheta-1}(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \text{usw.})^{\lambda},$$

wenn man irgend eine Größe ν annimmt und

$$\frac{\eta}{\nu} = s \quad \text{und} \quad z^s = x$$

setzt, in eine andere ihr gleiche über, deren Ordinate

$$\frac{\nu}{\eta} x^{\frac{\nu\vartheta-\eta}{\eta}} (e + fx^{\nu} + gx^{2\nu} + \text{usw.})^{\lambda}$$

ist.

Folgerung 3.

Und jede Kurve, deren Ordinate

$$z^{\vartheta-1} (a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + \text{usw.}) (e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \text{usw.})^{\lambda}$$

ist, geht, wenn man irgend eine Größe ν annimmt und

$$\frac{\eta}{\nu} = s \quad \text{und} \quad z^{s} = x$$

setzt, in eine andere ihr gleiche über, deren Ordinate lautet:

$$\frac{\nu}{\eta} x^{\frac{\nu\vartheta-\eta}{\eta}} (a + bx^{\nu} + cx^{2\nu} + \text{usw.}) (e + fx^{\nu} + gx^{2\nu} + \text{usw.})^{\lambda}.$$

Folgerung 4.

Und jede Kurve, deren Ordinate

$$z^{\vartheta-1} (a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + \text{usw.}) (e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \text{usw.})^{\lambda} \cdot (k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + \text{usw.})^{\mu}$$

ist, geht, wenn man irgend eine Größe ν annimmt und

$$\frac{\nu}{\eta} = s \quad \text{und} \quad z^{s} = x$$

setzt, in eine andere ihr gleiche über, deren Ordinate

$$\frac{\nu}{\eta} x^{\frac{\nu\vartheta-\eta}{\eta}} (a + bx^{\nu} + cx^{2\nu} + \text{usw.}) (e + fx^{\nu} + gx^{2\nu} + \text{usw.})^{\lambda} (k + lx^{s} + mx^{2s} + \text{usw.})^{\mu}$$

ist.

Folgerung 5.

Und jede Kurve, deren Ordinate

$$z^{\vartheta-1} (e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \text{usw.})^{\lambda}$$

ist, geht, wenn man

$$\frac{1}{z} = x$$

setzt, in eine andere ihr gleiche über, deren Ordinate

$$\frac{1}{x^{\vartheta+1}}(e + fx^{-\eta} + gx^{-2\eta} + \text{usw.})^{\lambda}$$

ist, d. h.:

$$\frac{1}{x^{\vartheta+1+\eta\lambda}}(f + ex^{\eta})^{\lambda},$$

wenn nur ein Binom in dem Wurzelausdruck steht, oder

$$\frac{1}{x^{\vartheta+1+2\eta\lambda}}(g + fx^{\eta} + ex^{2\eta})^{\lambda},$$

wenn ein Trinom dasteht, und so fort.

Folgerung 6.

Und jede Kurve, deren Ordinate

$$z^{\vartheta-1}(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \text{usw.})^{\lambda}(k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + \text{usw.})^{\mu}$$

ist, geht, wenn man

$$\frac{1}{z} = x$$

setzt, in eine andere ihr gleiche über, deren Ordinate

$$\frac{1}{x^{\vartheta+1}}(e + fx^{-\eta} + gx^{-2\eta} + \text{usw.})^{\lambda}(k + lx^{-\eta} + mx^{-2\eta} + \text{usw.})^{\mu}$$

ist, d. h.:

$$\frac{1}{x^{\vartheta+1+\eta\lambda+\eta\mu}}(f + ex^{\eta})^{\lambda}(l + kx^{\eta})^{\mu},$$

wenn in jedem Wurzelausdruck ein Binom steht, oder

$$\frac{1}{x^{\vartheta+1+2\eta\lambda+\eta\mu}}(g + fx^{\eta} + ex^{2\eta})^{\lambda}(l + kx^{\eta})^{\mu},$$

wenn in dem ersten Wurzelausdruck ein Trinom und in dem zweiten Ausdruck ein Binom steht. Ebenso ist es in den andern Fällen.

Man beachte, daß die zwei gleichen Flächen in diesen letzten beiden Folgerungen auf entgegengesetzten Seiten der Ordinaten liegen. Wenn die Fläche bei der einen Kurve an der Abszisse liegt, so liegt die ihr gleiche Fläche bei der andern Kurve an der verlängerten Abszisse.

Folgerung 7.

Wird die Relation zwischen der Ordinate y und der Abszisse z einer Kurve durch irgend eine affizierte Gleichung von folgender Form definiert:

$$y^{\alpha}(e + fy^{\eta}z^{\delta} + gy^{2\eta}z^{2\delta} + \text{usw.}) = z^{\beta}(k + ly^{\eta}z^{\delta} + my^{2\eta}z^{2\delta} + \text{usw.}),$$

so geht diese Figur, wenn man

$$s = \frac{\eta - \delta}{\eta}, \quad x = \frac{1}{s}z^{s} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\eta - \delta}{\alpha\delta + \beta\eta}$$

annimmt, in eine andere ihr gleiche über, deren Abszisse x sich bei gegebener Ordinate v durch die nicht affizierte Gleichung

$$\frac{1}{s}v^{\alpha\lambda}(e + fv^{\eta} + gv^{2\eta} + \text{usw.})^{\lambda}(k + lv^{\eta} + mv^{2\eta} + \text{usw.})^{-\lambda} = x$$

bestimmt.

Folgerung 8.

Wird die Relation zwischen der Ordinate y und der Abszisse z durch irgend eine affizierte Gleichung von folgender Form definiert:

$$y^{\alpha}(e + fy^{\eta}z^{\delta} + gy^{2\eta}z^{2\delta} + \text{usw.}) = z^{\beta}(k + ly^{\eta}z^{\delta} + my^{2\eta}z^{2\delta} + \text{usw.}) + z^{\gamma}(p + qy^{\eta}z^{\delta} + ry^{2\eta}z^{2\delta} + \text{usw.}),$$

so geht diese Figur, wenn man

$$s = \frac{\eta - \delta}{\eta}, \quad x = \frac{1}{s}z^{s}, \quad \mu = \frac{\alpha\delta + \beta\eta}{\eta - \delta} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\alpha\delta + \gamma\eta}{\eta - \delta}$$

annimmt, in eine andere ihr gleiche über, deren Abszisse x sich bei gegebener Ordinate v durch die weniger affizierte Gleichung:

$$v^{\alpha}(e + fv^{\eta} + gv^{2\eta} + \text{usw.}) = s^{\mu}x^{\mu}(k + lv^{\eta} + mv^{2\eta} + \text{usw.}) + s^{\nu}x^{\nu}(p + qv^{\eta} + rv^{2\eta} + \text{usw.})$$

bestimmt.

Folgerung 9.

Jede Kurve, deren Ordinate

$$\pi z^{\vartheta-1}\big(\nu e + (\nu + \eta)fz^{\eta} + (\nu + 2\eta)gz^{2\eta} + \text{usw.}\big)(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \text{usw.})^{\lambda-1}$$
$$\text{mal}\{a + b(ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \text{usw.})^{\tau}\}^{\omega}$$

ist, geht, wenn $\vartheta = \lambda\nu$ ist, und man

$$x = (ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \text{usw.})^{\pi}, \quad \sigma = \frac{\tau}{\pi} \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{\lambda - \pi}{\pi}$$

annimmt, in eine ihr gleiche über, deren Ordinate

$$x^{\vartheta}(a + bx^{\sigma})^{\omega}$$

ist. Man beachte, daß die erste Ordinate in dieser Folgerung einfacher wird, wenn man $\lambda = 1$ setzt oder $\tau = 1$ setzt, und wenn man bewirkt, daß sich der Wurzelausdruck mit dem Exponenten ω angeben läßt, oder auch, wenn man $\omega = -1$ und $\lambda = 1 = \tau = \sigma = \pi$ setzt, um andere Fälle zu übergehen.

Folgerung 10.

Für

$$ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \text{usw.},$$

$$\nu ez^{\nu-1} + (\nu + \eta)fz^{\nu+\eta-1} + (\nu + 2\eta)gz^{\nu+2\eta-1} + \text{usw.}$$

und für

$$k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + \text{usw.},$$

$$\eta lz^{\eta-1} + 2\eta mz^{2\eta-1} + \text{usw.}$$

schreibe man bezüglich R, r und S, s. Jede Kurve, deren Ordinate

$$(\pi Sr + \varphi Rs)R^{\lambda-1}S^{\mu-1}(aS^{-v} + bR^{\tau})^{\omega}$$

ist, geht, wenn

$$\frac{\mu - v\omega}{\lambda} = \frac{v}{\tau} = \frac{\varphi}{\pi}, \quad \frac{\tau}{\pi} = \sigma, \quad \frac{\lambda - \pi}{\pi} = \vartheta \text{ und } R^{\pi}S^{\varphi} = x$$

ist, in eine ihr gleiche über, deren Ordinate

$$x^{\vartheta}(a + bx^{\sigma})^{\omega}$$

ist. Man beachte, daß die erste Ordinate einfacher wird, wenn man für τ, v und λ oder μ Einheiten setzt, und wenn man macht, daß der Wurzelausdruck mit dem Exponenten ω sich angeben läßt, oder wenn man $\omega = -1$ oder $\mu = o$ setzt.

§ 10. Problem 3.

Die einfachsten Figuren zu finden, mit denen sich eine beliebige Kurve, deren Ordinate y sich bei gegebener Abszisse z durch eine nicht affizierte Gleichung bestimmt, geometrisch vergleichen läßt.

Fall 1.

Die Ordinate sei

$$az^{\vartheta-1}.$$

Dann wird die Fläche

$$\frac{1}{\vartheta} az^{\vartheta}$$

sein, wie man aus § 5 leicht ersieht, wenn man

$$b = o = c = d = f = g = h \quad \text{und} \quad e = 1$$

setzt.

Fall 2.

Die Ordinate sei

$$az^{\vartheta-1}(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \text{ usw.})^{\lambda-1}.$$

Wenn sich die Kurve mit geradlinigen Figuren geometrisch vergleichen läßt, so wird man sie nach § 5 quadrieren, indem man

$$b = o = c = d$$

setzt. Wenn nicht, so wird man sie nach Folgerung 2 in § 9 in eine andere ihr gleiche Kurve verwandeln, deren Ordinate

$$\frac{a}{\eta} x^{\frac{\vartheta-\eta}{\eta}} (e + fx + gx^2 + \text{ usw.})^{\lambda-1}$$

ist. Wenn man dann von den Exponenten $\frac{\vartheta - \eta}{\eta}$ und $\lambda - 1$ (nach § 7) Einheiten fortwirft, bis jene Exponenten möglichst klein werden, so wird man zu den einfachsten Figuren gelangen, die man auf diese Weise gewinnen kann. Eine jede von diesen gibt dann nach Folgerung 5 in § 9 eine andere, die manchmal einfacher ist. Und aus diesen ergeben sich, wenn man sie nach § 3 und Folgerung 9 und 10 in § 9 miteinander vergleicht, zuweilen noch einfachere Figuren. Endlich wird man aus den Figuren, die man als die einfachsten angenommen hat, rückwärts die gesuchte Fläche berechnen.

Fall 3.

Die Ordinate sei

$$z^{\vartheta-1}(a + bz^{\eta} + cz + \text{ usw.})(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \text{ usw.})^{\lambda-1}.$$

Diese Figur wird man, wenn sie sich quadrieren läßt, nach § 5 quadrieren. Wenn nicht, so hat man die Ordinate in die Bestandteile zu sondern

$$z^{\vartheta-1}a(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \text{usw.})^{\lambda-1},$$
$$z^{\vartheta-1}bz^{\eta}(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \text{usw.})^{\lambda-1}$$

usw. und nach Fall 2 die einfachsten Figuren zu finden, mit denen die jenen Bestandteilen entsprechenden Figuren verglichen werden können. Denn die Flächen der Figuren, die jenen Bestandteilen entsprechen, werden, mit ihren eigenen Zeichen $+$ und $-$ verbunden, die ganze gesuchte Fläche zusammensetzen.

Fall 4.

Die Ordinate sei

$$z^{\vartheta-1}(a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + \text{usw.})(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \text{usw.})^{\lambda-1}$$
$$\text{mal} \quad (k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + \text{usw.})^{\mu-1}.$$

Wenn sich die Kurve quadrieren läßt, so wird man sie nach § 6 quadrieren. Wenn nicht, so wird man sie nach Folgerung 4 in § 9 in eine einfachere verwandeln und dann nach § 8 und Folgerung 6, 9 und 10 in § 9 mit den einfachsten Figuren vergleichen, wie es in Fall 2 und 3 geschieht.

Fall 5.

Wenn die Ordinate aus verschiedenen Teilen besteht, so sind diese einzeln als Ordinaten ebensovieler Kurven anzusehen, und jene Kurven sind, so viele sich quadrieren lassen, einzeln zu quadrieren. Ihre Ordinaten sind von der ganzen Ordinate fortzunehmen. Darauf ist die Kurve, welche der übrig gebliebene Teil der Ordinate bezeichnet, für sich (wie in Fall 2, 3 und 4) mit den einfachsten Figuren zu vergleichen, mit denen er verglichen werden kann. Die Summe aller Flächen ist dann als die Fläche der vorgelegten Kurve anzusehen.

Folgerung 1.

Hiernach läßt sich auch jede Kurve, deren Ordinate eine affizierte quadratische Wurzel ihrer Gleichung ist, mit den einfachsten Figuren, sei es geradlinigen, sei es krummlinigen, vergleichen. Denn jene Wurzel besteht immer aus zwei Teilen, die, für sich betrachtet, nicht affizierte Wurzeln von Gleichungen sind.

Es werde die Gleichung vorgelegt

$$a^2y^2 + z^2y^2 = 2a^3y + 2z^3y - z^4.$$

Die ausgezogene Wurzel wird sein

$$y = \frac{a^3 + z^3 + a\sqrt{a^4 + 2az^3 - z^4}}{a^2 + z^2}.$$

Ihr rationaler Bestandteil

$$\frac{a^3 + z^3}{a^2 + z^2}$$

und ihr irrationaler Bestandteil

$$\frac{a\sqrt{a^4 + 2az^3 - z^4}}{a^2 + z^2}$$

sind die Ordinaten von Kurven, die nach diesem Paragraphen entweder quadriert werden oder mit den einfachsten verglichen werden können, mit denen sie eine geometrische Vergleichung zulassen.

Folgerung 2.

Und jede Kurve, deren Ordinate durch irgend eine affizierte Gleichung definiert wird, die mittels Folgerung 7 in § 9 in eine nicht affizierte Gleichung übergeht, wird nach dem vorliegenden Paragraphen entweder quadriert, wenn sie sich quadrieren läßt, oder mit den einfachsten Figuren verglichen, mit denen sie sich vergleichen läßt. Und auf diese Weise wird jede Kurve quadriert, deren Gleichung dreigliedrig ist. Denn jene Gleichung verwandelt sich, wenn sie affiziert ist, nach Folgerung 7 in § 9 in eine nicht affizierte und gibt dann, indem sie nach Folgerung 2 und 5 in § 9 in die einfachste übergeht, entweder die Quadratur der Figur, wenn sie sich quadrieren läßt, oder die einfachste Kurve, mit der sie sich vergleichen läßt.

Folgerung 3.

Und jede Kurve, deren Ordinate durch irgend eine affizierte Gleichung definiert wird, die mittels Folgerung 8 in § 9 in eine affizierte quadratische Gleichung übergeht, wird entweder nach dem vorliegenden Paragraphen und Folgerung 1 quadriert, wenn sie sich quadrieren läßt, oder mit den einfachsten Figuren verglichen, mit denen sie eine geometrische Vergleichung zuläßt.

Zusatz.

Wenn Figuren quadriert werden sollen, so wäre es zu mühsam, immer auf diese allgemeinen Regeln zurückzugreifen. Es ist vorzuziehen, die einfacheren und mehr zur Anwendung kommenden Figuren einmal zu quadrieren und die Quadraturen in eine Tabelle einzutragen und dann die Tabelle zu Rate zu ziehen, so oft man irgend eine solche Kurve quadrieren muß. Von solcher Art sind aber die beiden folgenden Tabellen. In ihnen bedeutet z die Abszisse, y die rechtwinklige Ordinate und t die Fläche der zu quadrierenden Kurve. d, e, f, g, h, η sind gegebene Größen mit ihren Zeichen $+$ und $-$.

Tabelle einfacherer Kurven, die sich quadrieren lassen.

I.

*Fo. d. K.**) $\quad dz^{\eta-1} = y,$

*Fl. d. K.**) $\quad \frac{d}{\eta} z^{\eta} = t.$

II.

Fo. d. K. $\quad \frac{dz^{\eta-1}}{e^2 + 2efz^{\eta} + f^2 z^{2\eta}} = y,$

Fl. d. K. $\quad \frac{dz^{\eta}}{\eta e^2 + \eta e f z^{\eta}} = t$ oder $\frac{-d}{\eta e f + \eta f^2 z^{\eta}} = t.$

III.

1. *Fo. d. K.* $dz^{\eta-1}\sqrt{e + fz^{\eta}} = y,$
   Fl. d. K. $\frac{2d}{3\eta f} R^3 = t,$ wobei $R = \sqrt{e + fz^{\eta}}.$

2. *Fo. d. K.* $dz^{2\eta-1}\sqrt{e + fz^{\eta}} = y,$
   Fl. d. K. $\frac{-4e + 6fz^{\eta}}{15\eta f^2} dR^3 = t.$

3. *Fo. d. K.* $dz^{3\eta-1}\sqrt{e + fz^{\eta}} = y,$
   Fl. d. K. $\frac{16e^2 - 24efz^{\eta} + 30f^2 z^{2\eta}}{105\eta f^3} dR^3 = t.$

*) Fo. d. K. bedeutet »Form der Kurve«, Fl. d. K. »Fläche der Kurve«.

$$4.\begin{cases} Fo.\ d.\ K.\ dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^\eta}=y, \\ Fl.\ d.\ K.\ \dfrac{-96e^3+144e^2fz^\eta-180ef^2z^{2\eta}+210f^3z^{3\eta}}{945\eta f^4}dR^3=t. \end{cases}$$

IV.

$$1.\begin{cases} Fo.\ d.\ K.\ \dfrac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta}}=y, \\ Fl.\ d.\ K.\ \dfrac{2d}{\eta f}R=t. \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} Fo.\ d.\ K.\ \dfrac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta}}=y, \\ Fl.\ d.\ K.\ \dfrac{-4e+2fz^\eta}{3\eta f^2}dR=t. \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} Fo.\ d.\ K.\ \dfrac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta}}=y, \\ Fl.\ d.\ K.\ \dfrac{16e^2-8efz^\eta+6f^2z^{2\eta}}{15\eta f^3}=t. \end{cases}$$

$$4.\begin{cases} Fo.\ d.\ K.\ \dfrac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta}}=y, \\ Fl.\ d.\ K.\ \dfrac{-96e^3+48e^2fz^\eta-36ef^2z^{2\eta}+30f^3z^{3\eta}}{105\eta f^4}dR=t. \end{cases}$$

Tabelle einfacherer Kurven, die sich mit der Ellipse und Hyperbel vergleichen lassen.

Es sei aGD oder PGD oder GDS der Kegelschnitt, dessen Fläche zur Quadratur der vorgelegten Kurve erforderlich ist; A sei sein Mittelpunkt, Ka die Achse, a der Scheitel, AP die konjugierte Halbachse, A oder a oder α der gegebene Anfangspunkt der Abszissen, die Abszisse AB oder aB oder αB gleich x, die rechtwinklige Ordinate BD gleich v und die Fläche $ABDP$ oder $aBDG$ oder αBDG gleich s, während αG die Ordinate im Punkte α ist. Man verbinde KD, AD, aD, ziehe die Tangente DT, die die Abszisse AB in T trifft, und vollende das Parallelogramm $ABDO$. Wenn zur Quadratur der vorgelegten Kurve die Flächen von zwei Kegelschnitten erforderlich sind, so heiße die Abszisse des zweiten ξ, die

Ordinate v und die Fläche σ. Es sei aber $\div$ die Differenz zweier Größen, wo es ungewiß ist, ob man die zweite von der ersten oder die erste von der zweiten abziehen muß. Bei der sechsten Form schreibe man p für $\sqrt{f^2 - 4eg}$.

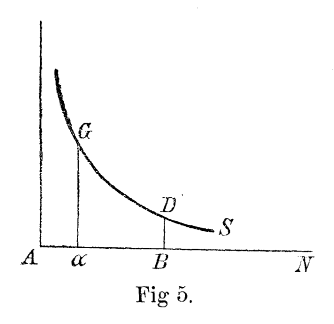


Fig 5.

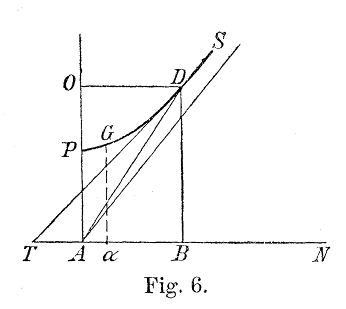


Fig. 6.

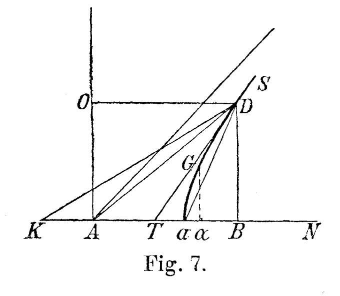


Fig. 7.

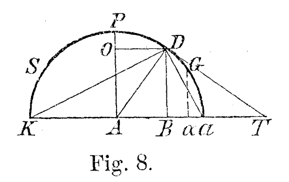


Fig. 8.

I.

1. Fo. d. Ku.*) $\dfrac{d z^{\eta - 1}}{e + f z^{\eta}} = y$,

A. d. Ke.*) $z^{\eta} = x$,

O. d. Ke.*) $\dfrac{d}{e + f x} = v$,

Fl. d. Ku.*) $\dfrac{1}{\eta} s = t = \dfrac{\alpha GDB}{\eta}$. (Fig. 5.)

*) Fo. d. Ku. = Form der Kurve, A. d. Ke. = Abszisse des Kegelschnitts, O. d. Ke. = Ordinate des Kegelschnitts, Fl. d. Ku. = Fläche der Kurve.

$$2.\begin{cases}\text{Fo. d. Ku.} & \dfrac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^\eta}=y\,,\\ \text{A. d. Ke.} & z^\eta=x\,,\\ \text{O. d. Ke.} & \dfrac{d}{e+fx}=v\,,\\ \text{Fl. d. Ku.} & \dfrac{d}{\eta f}z^\eta-\dfrac{e}{\eta f}s=t\,.\end{cases}$$

$$3.\begin{cases}\text{Fo. d. Ku.} & \dfrac{dz^{3\eta-1}}{e+fz^\eta}=y\,,\\ \text{A. d. Ke.} & z^\eta=x\,,\\ \text{O. d. Ke.} & \dfrac{d}{e+fx}=v\,,\\ \text{Fl. d. Ku.} & \dfrac{d}{2\eta f}z^{2\eta}-\dfrac{de}{\eta f^2}z^\eta+\dfrac{e^2}{\eta f^2}s=t.\end{cases}$$

II.

$$1.\begin{cases}\text{Fo. d. Ku.} & \dfrac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^\eta}=y\,,\\ \text{A. d. Ke.} & \sqrt{\dfrac{d}{e+fz^\eta}}=x\,,\\ \text{O. d. Ke.} & \sqrt{\dfrac{d}{f}-\dfrac{e}{f}x^2}=v\,,\\ \text{Fl. d. Ku.} & \dfrac{2xv\div 4s}{\eta}=t=\dfrac{4}{\eta}\,ADGa. \quad \text{(Fig. 7, 8.)}\end{cases}$$

$$2.\begin{cases}\text{Fo. d. Ku.} & \dfrac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^\eta}=y\,,\\ \text{A. d. Ke.} & \sqrt{\dfrac{d}{e+fz^\eta}}=x\,,\\ \text{O. d. Ke.} & \sqrt{\dfrac{d}{f}-\dfrac{e}{f}x^2}=v\,,\\ \text{Fl. d. Ku.} & \dfrac{2d}{\eta f}z^{\frac{1}{2}\eta}+\dfrac{4es-2exv}{\eta f}=t\,.\end{cases}$$

3. Fo. d. Ku. $\dfrac{dz^{\frac{5}{2}\eta-1}}{e+fz^\eta}=y$,

A. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{d}{e+fz^\eta}}=x$,

O. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{d}{f}-\dfrac{e}{f}x^2}=v$,

Fl. d. Ku. $\dfrac{2d}{3\eta f}z^{\frac{3}{2}\eta}-\dfrac{2de}{\eta f^2}z^{\frac{1}{2}\eta}+\dfrac{2e^2xv-4e^2s}{\eta f^2}=t$.

III.

1. Fo. d. Ku. $\dfrac{d}{z}\sqrt{e+fz^\eta}=y$,

A. d. Ke. $\dfrac{1}{z^\eta}=x^2$ *oder* $\dfrac{1}{z^\eta}=x$,

O. d. Ke. $\sqrt{f+ex^2}=v$ *bzw.* $\sqrt{fx+ex^2}=v$,

Fl. d. Ku. $\dfrac{4de}{\eta f}\left(\dfrac{v^3}{2ex}-s\right)=t=\dfrac{4de}{\eta f}$ mal $aGDT$ oder mal $APDB \div TDB$ (Fig. 6, 7, 8) *bzw.*

$\dfrac{8de^2}{\eta f^2}\left(s-\dfrac{1}{2}xv-\dfrac{fv}{4e}+\dfrac{f^2v}{4e^2x}\right)=t=\dfrac{8de^2}{\eta f^2}$ mal $aGDA+\dfrac{f^2v}{4e^2x}$. (Fig. 7, 8.)

2. Fo. d. Ku. $\dfrac{d}{z^{\eta+1}}\sqrt{e+fz^\eta}=y$,

A. d. Ke. $\dfrac{1}{z^\eta}=x^2$ *oder* $\dfrac{1}{z^\eta}=x$,

O. d. Ke. $\sqrt{f+ex^2}=v$ *bzw.* $\sqrt{fx+ex^2}=v$,

Fl. d. Ku. $-\dfrac{2d}{\eta}s=t=\dfrac{2d}{\eta}APDB$ oder $\dfrac{2d}{\eta}aGDB$ (Fig. 6, 7, 8)

bzw. $\dfrac{4de}{\eta f}\left(s-\dfrac{1}{2}xv-\dfrac{fv}{2e}\right)=t=\dfrac{4de}{\eta f}aGDK$. (Fig. 7, 8.)

3. Fo. d. Ku. $\dfrac{d}{z^{2\eta+1}}\sqrt{e+fz^\eta}=y$,
A. d. Ke. $\dfrac{1}{z^\eta}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{fx+ex^2}=v$,
Fl. d. Ku. $-\dfrac{d}{\eta}s=t=\dfrac{d}{\eta}(-aGDB$ oder $BDPK)$. (Fig. 8.)

4. Fo. d. Ku. $\dfrac{d}{z^{3\eta+1}}\sqrt{e+fz^\eta}=y$,
A. d. Ke. $\dfrac{1}{z^\eta}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{fx+ex^2}=v$,
Fl. d. Ku. $\dfrac{3dfs-2dv^3}{6\eta e}=t$.

IV.

1. Fo. d. Ku. $\dfrac{d}{z\sqrt{e+fz}}=y$,
A. d. Ke. $\dfrac{1}{z^\eta}=x^2$ *oder* $\dfrac{1}{z^\eta}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{f+ex^2}=v$ *bzw.* $\sqrt{fx+ex^2}=v$,
Fl. d. Ku. $\dfrac{4d}{\eta f}(\tfrac{1}{2}xv \div s)=t=\dfrac{4d}{\eta f}$ mal PAD oder mal $aGDA$ (Fig. 6, 7, 8) *bzw.* $\dfrac{8de}{\eta f^2}\left(s-\tfrac{1}{2}xv-\dfrac{fv}{4e}\right)=t=\dfrac{8de}{\eta f^2}$ mal $aGDA$. (Fig. 7, 8.)

2. Fo. d. Ku. $\dfrac{d}{z^{\eta+1}\sqrt{e+fz}}=y$,
A. d. Ke. $\dfrac{1}{z^\eta}=x^2$ *oder* $\dfrac{1}{z^\eta}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{f+ex^2}=v$ *bzw.* $\sqrt{fx+ex^2}=v$,
Fl. d. Ku. $\dfrac{2d}{\eta e}(s-xv)=t=\dfrac{2d}{\eta e}$ mal POD oder mal $AODGa$ (Fig. 6, 7, 8) *bzw.* $\dfrac{4d}{\eta f}(\tfrac{1}{2}xv \div s)=t=\dfrac{4d}{\eta f}$ mal $aDGa$. (Fig. 7, 8.)

3. Fo. d. Ku. $\dfrac{d}{z^{2\eta+1}\sqrt{e+fz}}=y$,

A. d. Ke. $\dfrac{1}{z^{\eta}}=x$,

O. d. Ke. $\sqrt{fx+ex^2}=v$,

Fl. d. Ku. $\dfrac{d}{\eta e}(3s \div 2xv)=t=\dfrac{d}{\eta e}$ mal $3aDGa \div \triangle aDB$.

(Fig. 7, 8.)

4. Fo. d. Ku. $\dfrac{d}{z^{3\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$,

A. d. Ke. $\dfrac{1}{z^{\eta}}=x$,

O. d. Ke. $\sqrt{fx+ex^2}=v$,

Fl. d. Ku. $\dfrac{10dfxv-15dfs-2dex^2v}{6\eta e^2}=t$.

V.

1. Fo. d. Ku. $\dfrac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$,

A. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{d}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=x$ *oder* $\sqrt{\dfrac{dz^{2\eta}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=x$,

O. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{d}{g}+\dfrac{f^2-4eg}{4g^2}x^2}=v$ *bzw.* $\sqrt{\dfrac{d}{e}+\dfrac{f^2-4eg}{4e^2}x^2}=v$,

Fl. d. Ku. $\dfrac{xv-2s}{\eta}=t$ *bzw.* $\dfrac{2s-xv}{\eta}=t$.

2. Fo. d. Ku. $\dfrac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$,

A. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{d}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=x$, $fz^{\eta}+gz^{2\eta}=\xi$,

O. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{d}{g}+\dfrac{f^2-4eg}{4g^2}x^2}=v$, $\dfrac{1}{e+\xi}=v$,

Fl. d. Ku. $\dfrac{d\sigma+2fs-fxv}{2\eta g}=t$.

VI.

1.
Fo. d. Ku. $\dfrac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y,$

A. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{2dg}{f-p+2gz^{\eta}}}=x, \quad \sqrt{\dfrac{2dg}{f+p+2gz^{\eta}}}=\xi,$

O. d. Ke. $\sqrt{d+\dfrac{-f+p}{2g}x^2}=v, \quad \sqrt{d+\dfrac{-f-p}{2g}\xi^2}=v,$

Fl. d. Ku. $\dfrac{2xv-4s-2\xi v+4\sigma}{\eta p}=t.$

2.
Fo. d. Ku. $\dfrac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y,$

A. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{2dez^{\eta}}{fz^{\eta}-pz^{\eta}+2e}}=x, \quad \sqrt{\dfrac{2dez^{\eta}}{fz^{\eta}+pz^{\eta}+2e}}=\xi,$

O. d. Ke. $\sqrt{d+\dfrac{-f+p}{2e}x^2}=v, \quad \sqrt{d+\dfrac{-f-p}{2e}\xi^2}=v,$

Fl. d. Ku. $\dfrac{4s-2xv-4\sigma+2\xi v}{\eta p}=t.$

VII.

1.
Fo. d. Ku. $\dfrac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y,$

A. d. Ke. $z^{\eta}=x, \quad 1/z^{\eta}=\xi,$

O. d. Ke. $\sqrt{e+fx+gx^2}=v, \quad \sqrt{g+f\xi+e\xi^2}=v,$

Fl. d. Ku. $\dfrac{4de^2\xi v+2defv-2dfgxv+(4deg-2f^2d)v-8de^2\sigma+4dfgs}{4\eta eg-\eta f^2}=t.$

2.
Fo. d. Ku. $dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y,$

A. d. Ke. $z^{\eta}=x,$

O. d. Ke. $\sqrt{e+fx+gx^2}=v,$

Fl. d. Ku. $\dfrac{d}{\eta}\,s=t=\dfrac{d}{\eta}\,aGDB.$ (Fig. 6, 7, 8.)

3. Fo. d. Ku. $dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$,
A. d. Ke. $z^{\eta}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{e+fx+gx^2}=v$,
Fl. d. Ku. $\frac{d}{3\eta g}v^3-\frac{df}{2\eta g}s=t$.

4. Fo. d. Ku. $dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$,
A. d. Ke. $z^{\eta}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{e+fx+gx^2}=v$,
Fl. d. Ku. $\frac{6dgx-5df}{24\eta g^2}v^3+\frac{5df^2-4deg}{16\eta g^2}s=t$.

VIII.

1. Fo. d. Ku. $\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$,
A. d. Ke. $z^{\eta}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{e+fx+gx^2}=v$,
Fl. d. Ku. $\frac{8dgs-4dgxv-2dfv}{4\eta eg-\eta f^2}=t=\frac{8dg}{4\eta eg-\eta f^2}$
mal $(aGDB\pm\triangle DBA)$. (Fig. 6, 7.)

2. Fo. d. Ku. $\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$,
A. d. Ke. $z^{\eta}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{e+fx+gx^2}=v$,
Fl. d. Ku. $\frac{-4dfs+2dfxv+4dev}{4\eta eg-\eta f^2}=t$.

3. Fo. d. Ku. $\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$,
A. d. Ke. $z^{\eta}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{e+fx+gx^2}=v$,
Fl. d. Ku. $\frac{(3df^2-4deg)s+(-2df^2+4deg)xv-2defv}{4\eta eg^2-\eta f^2g}=t$.

4. Fo. d. Ku. $\dfrac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$,
A. d. Ke. $z^{\eta}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{e+fx+gx^2}=v$,
Fl. d. Ku. $\dfrac{(36\,defg-15\,df^3)s+(8deg^2-2\,df^2g)\,x^2v+(10\,df^3-28\,defg)\,xv+(10\,def^2-16\,de^2g)\,v}{24\,\eta\,e\,g^3-6\,\eta f^2 g^2}=t.$

IX.

1. Fo. d. Ku. $\dfrac{dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}}=y$,
A. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{df}{h}+\dfrac{eh-fg}{h}\,x^2}=v$,
Fl. d. Ku. $\dfrac{(6fg-4eh)s+(-2fg+2eh)xv+2dfv/x}{\eta fh}=t.$

2. Fo. d. Ku. $\dfrac{dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}}=y$,
A. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{df}{h}+\dfrac{eh-fg}{h}\,x^2}=v$,
Fl. d. Ku. $\dfrac{(4egh-4fg^2)s+(-2egh+2fg^2)xv+\frac{2}{3}dhv^3/x^3-2dfgv/x}{\eta fh^2}=t.$

X.

1. Fo. d. Ku. $\dfrac{dz^{\eta-1}}{(g+hz^{\eta})\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$,
A. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$,
O. d. Ke. $\sqrt{\dfrac{df}{h}+\dfrac{eh-fg}{h}\,x^2}=v$,
Fl. d. Ku. $\dfrac{2xv-4s}{\eta f}=t=\dfrac{4}{\eta f}\,ADGa.$ (Fig. 7, 8.)

$$2.\left\{\begin{aligned}
&\text{Fo. d. Ku. } \frac{dz^{2\eta-1}}{(g+hz^{\eta})\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y,\\
&\text{A. d. Ke. } \sqrt{\frac{d}{g+hz^{\eta}}} = x,\\
&\text{O. d. Ke. } \sqrt{\frac{df}{h} + \frac{eh-fg}{h}\,x^2} = v,\\
&\text{Fl. d. Ku. } \frac{4gs - 2gxv + 2dv/x}{\eta fh} = t.
\end{aligned}\right.$$

XI.

$$1.\left\{\begin{aligned}
&\text{Fo. d. Ku. } dz^{-1}\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}} = y,\\
&\text{A. d. Ke. } \sqrt{g+hz^{\eta}} = x, \qquad \sqrt{h+gz^{-\eta}} = \xi,\\
&\text{O. d. Ke. } \sqrt{\frac{eh-fg}{h} + \frac{f}{h}\,x^2} = v, \qquad \sqrt{\frac{fg-eh}{g} + \frac{e}{g}\,\xi^2} = v,\\
&\text{Fl. d. Ku. } \frac{2dxv^3z^{-\eta} - 4dfs - 4de\sigma}{\eta fg - \eta eh} = t.
\end{aligned}\right.$$

$$.\left\{\begin{aligned}
&\text{Fo. d. Ku. } dz^{\eta-1}\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}} = y,\\
&\text{A. d. Ke. } \sqrt{g+hz^{\eta}} = x,\\
&\text{O. d. Ke. } \sqrt{\frac{eh-fg}{h} + \frac{f}{h}\,x^2} = v,\\
&\text{Fl. d. Ku. } \frac{2d}{\eta h}\,s = t.
\end{aligned}\right.$$

$$3.\left\{\begin{aligned}
&\text{Fo. d. Ku. } dz^{2\eta-1}\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}} = y,\\
&\text{A. d. Ke. } \sqrt{g+hz^{\eta}} = x,\\
&\text{O. d. Ke. } \sqrt{\frac{eh-fg}{h} + \frac{f}{h}\,x^2} = v,\\
&\text{Fl. d. Ku. } \frac{dhxv^3 - (3dfg+deh)s}{2\eta fh^2} = t.
\end{aligned}\right.$$

In diesen Tafeln kann man die Reihe der Kurven einer jeden Form nach beiden Seiten ins Unendliche fortsetzen. In der ersten Tabelle nämlich werden in den Zählern der Flächen der dritten und vierten Form die Zahlenkoeffizienten der Anfangsglieder (2, — 4, 16, — 96, 768 usw.) erzeugt, indem man die Zahlen

$$-2,\ -4,\ -6,\ -8,\ -10 \text{ usw.}$$

fortgesetzt mit sich multipliziert, und die Koeffizienten der folgenden werden aus den Anfangskoeffizienten abgeleitet, indem man sie bei der dritten Form der Reihe nach mit

$$-\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{5}{4},\ -\tfrac{7}{6},\ -\tfrac{9}{8},\ -\tfrac{11}{10} \text{ usw.}$$

multipliziert, bei der vierten aber mit

$$-\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{3}{4},\ -\tfrac{5}{6},\ -\tfrac{7}{8},\ -\tfrac{9}{10} \text{ usw.}$$

Und die Koeffizienten der Nenner 3, 15, 105 usw. ergeben sich, indem man die Zahlen

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9 \text{ usw.}$$

fortgesetzt mit sich multipliziert.

Bei der zweiten Tabelle aber kann man die Reihe der Kurven der ersten, zweiten, fünften, sechsten, neunten und zehnten Form mit Hilfe bloßer Division und die der übrigen Formen mit Hilfe von § 3 und 4 nach beiden Seiten ins Unendliche fortführen.

Ja es pflegen sogar diese Reihen bei Änderung des Zeichens der Zahl η zu variieren. So wird nämlich z. B. die Kurve

$$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y.$$

zu

$$\frac{d}{z^{\frac{1}{2}\eta+1}}\sqrt{f+ez^{\eta}}=y.$$

§. 11. Theorem 8.[20]

Es sei $ADJC$ irgend eine Kurve, die die Abszisse $AB=z$ und die Ordinate $BD=y$ hat, und $AEKC$ eine andere Kurve, deren Ordinate BE gleich der Fläche ADB der vorigen ist, dividiert durch die Einheit. $AFLC$ sei eine dritte Kurve, deren Ordinate BF gleich der Fläche AEB der zweiten ist,

dividiert durch die Einheit, ferner $AGMC$ eine vierte Kurve, deren Ordinate BG gleich der Fläche AFB der dritten ist, dividiert durch die Einheit, ferner $AHNC$ eine fünfte Kurve, deren Ordinate BH gleich der Fläche AGB der vierten ist, dividiert durch die Einheit, und so fort ins Unendliche. Außerdem seien A, B, C, D, E usw. die Flächen der Kurven, welche die Ordinaten

$$y,\ zy,\ z^2y,\ z^3y,\ z^4y \text{ usw.}$$

und die gemeinsame Abszisse z haben.

Es werde irgend eine Abszisse $AC = t$ gegeben, und es sei:

$$BC = t - z = x.$$

Ferner seien P, Q, R, S, T usw. die Flächen der Kurven, welche die Ordinaten

$$y,\ xy,\ x^2y,\ x^3y,\ x^4y \text{ usw.}$$

und die gemeinsame Abszisse x haben.

Diese Flächen mögen aber alle an die ganze gegebene Abszisse AC und ebenso an die ihrer Lage nach gegebene und unendlich verlängerte Ordinate CJ grenzen.

Dann wird von den zu Anfang angegebenen Flächen:

die erste $ADJC \quad = A = P$,

die zweite $AEKC = tA - B = Q$,

die dritte $AFLC \quad = \dfrac{t^2A - 2tB + C}{2} = \dfrac{1}{2}R$,

die vierte $AGMC = \dfrac{t^3A - 3t^2B + 3tC - D}{6} = \dfrac{1}{6}S$,

die fünfte $AHNC = \dfrac{t^4A - 4t^3B + 6t^2C - 4tD + E}{24} = \dfrac{1}{24}T$.

Folgerung.

Wenn sich daher die Kurven, deren Ordinaten:

$$y,\ zy,\ z^2y,\ z^3y \text{ usw.}$$

oder

$$y,\ xy,\ x^2y,\ x^3y \text{ usw.}$$

sind, quadrieren lassen, so werden dies auch die Kurven

$$ADJC,\ AEKC,\ AFLC,\ AGMC \text{ usw.}$$

tun, und man hat die Ordinaten

$$BE,\ BF,\ BG,\ BH \text{ usw.},$$

die den Flächen der Kurven proportional sind.

Zusatz.

Wir haben oben gesagt, daß es bei Fluenten erste, zweite, dritte, vierte und andere Fluxionen gibt. Diese Fluxionen verhalten sich wie die Glieder unendlicher konvergenter Reihen.

Es sei z. B. z^η die Fluente und gehe im Fließen in $(z+o)^\eta$ über. Man löse sie nun in eine konvergente Reihe auf:

$$z^\eta + \eta o z^{\eta-1} + \frac{\eta^2-\eta}{2} o^2 z^{\eta-2} + \frac{\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta}{6} o^3 z^{\eta-3} + \text{usw.}$$

Das erste Glied dieser Reihe z^η wird jene Fluente sein, das zweite $\eta o z^{\eta-1}$ wird deren erstes Inkrement oder die erste Differenz sein, zu der, während sie eben entsteht, die erste Fluxion proportional ist. Das dritte

$$\frac{\eta\eta-\eta}{2} o^2 z^{\eta-2}$$

wird ihr zweites Inkrement sein oder die zweite Differenz, zu der, während sie eben entsteht, die zweite Fluxion proportional ist. Das vierte

$$\frac{\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta}{6} o^3 z^{\eta-3}$$

wird ihr drittes Inkrement sein oder die dritte Differenz, zu der, während sie eben entsteht, die dritte Fluxion proportional ist. Und so geht es ins Unendliche fort[21]).

Diese Fluxionen können aber durch die Kurvenordinaten

$$BD,\ BE,\ BF,\ BG,\ BH \text{ usw.}$$

dargestellt werden.

Wenn z. B. die Ordinate $BE\left(=\frac{ADB}{1}\right)$ die Fluente ist, so wird ihre erste Fluxion sich wie die Ordinate BD verhalten.

Wenn $BF\left(=\frac{AEB}{1}\right)$ die Fluente ist, so wird sich ihre erste Fluxion wie die Ordinate BE verhalten und ihre zweite Fluxion wie die Ordinate BD.

Wenn $HB\left(=\frac{AGB}{1}\right)$ die Fluente ist, so werden ihre erste, zweite, dritte und vierte Fluxion sich bezüglich wie BG, BF, BE, BD verhalten.

Es kann daher in Gleichungen[22]), die nur zwei unbekannte Größen enthalten, von denen eine eine gleichförmige Fluente und die andere irgend eine Fluxion einer andern Fluente ist, diese andere Fluente durch Quadratur von Kurven gefunden werden. Es werde nämlich ihre Fluxion durch die Ordinate BD dargestellt. Wenn dies die erste Fluxion ist, so suche man die Fläche $ADB = BE \times 1$. Wenn es die zweite Fluxion ist, so suche man die Fläche $AEB = BF \times 1$. Wenn es die dritte Fluxion ist, so suche man die Fläche $AFB = BG \times 1$ usw. Die gefundene Fläche wird dann die gesuchte Fluente darstellen.

Aber auch bei Gleichungen[23]), die eine Fluente und ihre erste Fluxion ohne eine andere Fluente enthalten oder zwei Fluxionen derselben Fluente, die erste und die zweite oder die zweite und die dritte oder die dritte und vierte usw., ohne eine andere Fluente, kann man die Fluenten durch Quadratur von Kurven finden. Man habe z. B. die Gleichung:

$$a^2\dot{v} = av + v^2,$$

wobei

$$v = BE, \quad \dot{v} = BD, \quad z = AB \text{ und } \dot{z} = 1$$

ist. Jene Gleichung wird, wenn man die Dimensionen der Fluxionen vervollständigt:

$$a^2\dot{v} = av\dot{z} + v^2\dot{z} \quad \text{oder} \quad \frac{a^2\dot{v}}{av + v^2} = \dot{z}.$$

Jetzt fließe v gleichförmig, und seine Fluxion sei $\dot{v} = 1$. Dann wird

$$\frac{a^2}{av + v^2} = \dot{z}.$$

Quadriert man die Kurve, deren Ordinate $\frac{a^2}{av + v^2}$, und deren Abszisse v ist, so wird man die Fluente z erhalten.

Ferner habe man die Gleichung:

$$a^2\ddot{v} = a\dot{v} + \dot{v}^2,$$

wobei

$$v = BF, \quad \dot{v} = BE, \quad \ddot{v} = BD \text{ und } z = AB$$

ist. Dann wird man durch die Relation zwischen $\dot{v}$ und $\ddot{v}$ oder BD und BE die Relation zwischen AB und BE finden, wie bei dem vorigen Beispiel. Dann wird man durch diese Relation die Relation zwischen AB und BF finden, indem man die Kurve AEB quadriert.

Gleichungen, die drei unbekannte Größen enthalten, lassen sich manchmal auf Gleichungen reduzieren, die nur zwei enthalten. In diesen Fällen wird man die Fluenten aus den Fluxionen finden wie oben. Man habe die Gleichung:

$$a - bx^m = cxy^n\dot{y} + dy^{2n}\dot{y}^2.$$

Man setze $y^n\dot{y} = \dot{v}$. Dann wird:

$$a - bx^m = cx\dot{v} + d\dot{v}^2.$$

Diese Gleichung gibt, wenn man die Kurve quadriert, deren Abszisse x, und deren Ordinate $\dot{v}$ ist, die Fläche v, und die andere Gleichung

$$y^n\dot{y} = \dot{v}$$

gibt, wenn man auf die Fluenten zurückgeht,

$$\frac{1}{n+1}y^{n+1} = v.$$

Daraus erhält man die Fluente y.

Ja sogar bei Gleichungen, die drei unbekannte Größen enthalten und sich nicht auf Gleichungen, die nur zwei enthalten, reduzieren lassen, ergeben sich manchmal die Fluenten durch Quadratur von Kurven. Man habe die Gleichung:

$$(ax^m + bx^n)^p = rex^{r-1}y^s + sex^r\dot{y}y^{s-1} - f\dot{y}y^t,$$

wobei $\dot{x} = 1$ ist. Der letzte Teil

$$rex^{r-1}y^s + sex^r\dot{y}y^{s-1} - f\dot{y}y^t$$

wird, wenn man auf die Fluenten zurückgeht,

$$ex^ry^s - \frac{f}{t+1}y^{t+1}.$$

Das ist also die Fläche der Kurve, deren Abszisse x, und deren Ordinate $(ax^m + bx^n)^p$ ist. Daraus ergibt sich die Fluente y.

Man habe die Gleichung:

$$\dot{x}(ax^m + bx^n)^p = \frac{d\dot{y}\,y^{\eta-1}}{\sqrt{e+fy^\eta}}.$$

Die Fluente, deren Fluxion

$$\dot{x}\,(ax^m + bx^n)^p$$

ist, wird sich wie die Fläche der Kurve verhalten, deren Abszisse x und deren Ordinate

$$(ax^m + bx^n)^p$$

ist. Ebenso wird sich die Fluente, deren Fluxion

$$\frac{d\dot{y}\,y^{\eta-1}}{\sqrt{e+fy^\eta}}$$

ist, verhalten wie die Fläche der Kurve, deren Abszisse y, und deren Ordinate

$$\frac{dy^{\eta-1}}{\sqrt{e+fy^\eta}}$$

ist, d. h. (nach Fall 1 der vierten Form in der ersten Tabelle) wie die Fläche:

$$\frac{2d}{\eta f}\sqrt{e+fy^\eta}.$$

Ich setze also $\frac{2d}{\eta f}\sqrt{e+fy^\eta}$ gleich der Fläche der Kurve, deren Abszisse x, und deren Ordinate $(ax^m + bx^n)^p$ ist, und erhalte dann die Fluente y.

Man beachte, daß jede Fluente, die aus ihrer ersten Fluxion gewonnen wird, um eine beliebige, nicht fließende Größe vermehrt oder vermindert werden darf. Wird sie aus der zweiten Fluxion gewonnen, so darf sie um eine beliebige Größe vermehrt oder vermindert werden, deren zweite Fluxion Null ist. Wird sie aus der dritten Fluxion gewonnen, so darf sie um eine beliebige Größe vermehrt oder vermindert werden, deren dritte Fluxion Null ist, und so fort ins Unendliche.

Wenn man, nachdem die Fluenten aus den Fluxionen gewonnen sind, an der Richtigkeit des Schlusses zweifelt, so

muß man von den gefundenen Fluenten wieder die Fluxionen bilden und sie mit den zu Anfang vorgelegten Fluxionen vergleichen. Wenn sie sich nämlich als gleich erweisen, so ist der Schluß richtig, wenn nicht, so muß man die Fluenten so korrigieren, daß ihre Fluxionen den zu Anfang vorgelegten Fluxionen gleich sind. Denn man kann die Fluente auch beliebig annehmen und die Annahme korrigieren, indem man die Fluxion der angenommenen Fluente gleich der vorgelegten Fluxion setzt und die entsprechenden Glieder miteinander vergleicht.

Durch diese Anfänge wird der Weg zu Größerem geebnet.



Newtons Leben.

Isaac Newton ist 1642 auf einem Landgut in Lincolnshire als Sohn eines Pächters geboren. Er hatte keinen Sinn für Landwirtschaft, und man erlaubte ihm daher, sich ganz dem gelehrten Studium zu widmen. 1661 bezog er die Universität Cambridge und wurde ein eifriger Jünger der Mathematik. Während *Leibniz*, als er in Leipzig studierte, überhaupt gar keine Gelegenheit hatte, die neueren Fortschritte der Mathematik kennen zu lernen, fand *Newton* in Cambridge ganz ausgezeichnete Lehrer, die ihn mit den neuesten Errungenschaften der Wissenschaft bekannt machen konnten. Er studierte *Descartes*' Geometrie und *Wallis*' Arithmetica infinitorum, und 1663 kam *Isaac Barrow* als Professor nach Cambridge, dessen Vorlesungen *Newton* eine Fülle von Anregungen boten.

Barrow (1630—1677) war eigentlich Theologe und hatte 1659 die priesterliche Weihe erhalten. Er betrachtete die Mathematik als eine Hilfswissenschaft der Theologie. »Um ein guter Theologe zu sein«, so sagte er, »muß man Chronologie verstehen, welche die Kenntnis der Astronomie verlangt, die hinwiederum die der Geometrie erfordert«. So kam es, daß *Barrow* Mathematiker wurde, und er hatte das Glück, bei einem so hervorragenden Lehrer wie *Wallis* zu lernen.

Newton nahm an *Barrows* wissenschaftlichen Arbeiten regen Anteil. *Barrow* selbst sagt es in seinem Hauptwerk, dem 1669—1670 erschienen »*Lectiones mathematicae*«, an verschiedenen Stellen, daß er Anregungen und Ratschläge von *Newton* erhalten habe. Trotzdem kann man mit Sicherheit feststellen, daß viel Bedeutendes darin *Barrows* eigenste Leistung ist. Z. B. hat er schon klar erkannt, daß die beiden heute als Differentiation und Integration bezeichneten Operationen zueinander inverse sind. Ferner können wir nennen seine Behandlung des »umgekehrten Tangentenproblems«, womit die Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung gemeint ist. Sicher war nicht bloß *Newton* der Anregende. Er wird vielmehr auch umgekehrt sehr viel von *Barrow* gehabt haben. Schon

das umfassende Wissen *Barrows*, der z. B. auch die Werke *Galileis* kannte, muß für den Schüler von unschätzbarem Wert gewesen sein.

Ein Akt edelster Selbstlosigkeit war es, daß *Barrow*, obwohl er selbst erst 39 Jahre alt war, auf seine Professur zugunsten *Newtons* verzichtete. So sehr fühlte er sich von dessen Größe überragt. Er wurde wieder Priester und zeichnete sich später als Prediger aus.

Schon im Jahre 1665 begann *Newtons* produktive Tätigkeit. Die in Cambridge ausbrechende Pest veranlaßte ihn, nach seiner Heimat zu gehen. Dort hat er, in der ländlichen Stille, seine ersten großen Entdeckungen gemacht. Ein beachtenswerter Unterschied zeigt sich hier zwischen *Newton* und *Leibniz*. Dieser lebte als Diplomat in der großen Welt. Er war sein Leben hindurch nach den verschiedensten Richtungen in Anspruch genommen und konnte sich nicht in dem Maße auf die Wissenschaft beschränken wie *Newton*. Dieser hat, wie wir sehen werden, erst viel später in der Öffentlichkeit eine Rolle gespielt, erst dann, als sein wissenschaftlicher Ruhm schon auf den Höhepunkt gestiegen war.

In den Jahren 1665—1667 fand *Newton* die Binomialformel (für gebrochene positive und negative Exponenten), er begann seine Fluxionsmethode auszubilden und sie für die Quadratur der Kurven zu verwerten. Auch die allgemeine Gravitation scheint er schon damals entdeckt zu haben. Dieselbe Kraft, die einen Körper zur Erde hinzieht, wirkt auch auf den Mond und hält ihn in seiner Bahn um die Erde fest. Der Mond, dessen Entfernung von der Erde sich messen läßt, bot *Newton* eine Bestätigung seiner Theorie. Freilich stimmte das Ergebnis der Rechnung zunächst sehr schlecht mit den Tatsachen überein. Es lag aber daran, daß der Erdradius nicht genau genug bekannt war. Als 1672 die Resultate der *Picard*schen Gradmessung vorlagen, hatte man einen genaueren Wert des Erdradius, und nun bestätigte sich die *Newton*sche Theorie aufs beste.

Es ist merkwürdig, daß *Newton* von seinen mathematischen Entdeckungen nichts veröffentlichte, obwohl er schon damals einiges schriftlich ausarbeitete. Eine solche Ausarbeitung hat er (vierzig Jahre später!) in der 1704 erschienenen *Quadratura curvarum* verwertet, die wir hier deutsch herausgeben. Auch die Abhandlung »*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*«, die er schon 1665 niederschrieb, blieb unveröffent-

licht. Sein Lehrer *Barrow*, dem er das Manuskript vorlegte, gab es an *Collins* weiter, und dieser sollte für die Bekanntmachung sorgen. *Leibniz* hatte 1676 bei seinem Londoner Aufenthalt Gelegenheit, dieses Manuskript zu sehen. Es blieb dann aber noch fast vierzig Jahre ungedruckt. *Newtons* mathematisches Hauptwerk, die »*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*« erschien überhaupt erst nach seinem Tode. Es handelt sich hier um eine Charaktereigentümlichkeit *Newtons*, der einem öffentlichen Auftreten abgeneigt war und nicht gern mit andern zusammen dasselbe Gebiet bearbeitete. Auch als er 1689 als Vertreter der Universität Cambridge ins Parlament gekommen war, hat er dort niemals das Wort ergriffen. Nur einmal, so wird erzählt, soll er es doch getan haben, aber nur, um den Diener zu bitten, ein Fenster zu schließen.

Seinen großen Namen in der Wissenschaft verdankt *Newton* einem Werk, das nicht rein mathematisch ist, nämlich den 1686—1687 veröffentlichten »*Philosophiae naturalis principia mathematica*«. Auch dieses Werk ist nur durch die Mitwirkung anderer an die Öffentlichkeit gelangt. *Newton* selbst hätte es vielleicht nie erscheinen lassen. Der Astronom *Halley* überredete ihn, das Werk zu schreiben, und bezahlte sogar die Druckkosten. Während des Druckes machte *Newton* noch Schwierigkeiten, weil ihn der bereits veröffentlichte Teil in eine Polemik mit dem Physiker *Hooke* verwickelte.

Obwohl es feststeht, dass die meisten Ergebnisse der »*Principia*« mit Hilfe der Fluxionsrechnung gefunden sind, hat *Newton* es doch vorgezogen, alles in der Sprache der gewöhnlichen Mathematik auszudrücken. Es ist aber leicht, es wieder in die Sprache der Infinitesimalrechnung zurückzuübersetzen. Übrigens finden sich in den »*Principia*« Bemerkungen über die Fluxionsmethode, von denen weiter unten in Anm. 3 einiges mitgeteilt ist. Aber nicht einmal ein Symbol für die Fluxion wird eingeführt.

Was *Newton* zurückgehalten hat, bei dieser so überaus günstigen Gelegenheit die Fluxionsmethode ausführlich auseinanderzusetzen und ihre Tragweite durch die Fülle wichtiger Anwendungen, die sich hier boten, darzutun, ist nicht recht zu erkennen.

Man kann zwei Gründe vermuten. Einer ist der, daß es ihm wohl hauptsächlich darauf ankam, den Inhalt der »*Principia*« möglichst leicht zugänglich zu machen und das Verständnis nicht durch eine neue Methode zu erschweren. Der andere

Grund ist der, daß *Newton* in den Grundbegriffen der Fluxionsrechnung noch gewisse Unklarheiten empfand, die er nicht zu überwinden vermochte, und die in der Tat auch erst viel später ganz beseitigt worden sind.

Man kann fragen, warum *Newton* in den »*Principia*« überhaupt von der Fluxionsrechnung gesprochen hat, wenn er sie doch nicht anwenden wollte. Vielleicht war es sein Wunsch (wie *Moritz Cantor* sagt), »eine gedruckte Äußerung zu schaffen, auf die er sich später einmal zur Datierung beziehen konnte«. Er nahm deshalb auch Veranlassung, seine Beziehungen zu *Leibniz* darzulegen, der inzwischen (1684) die Differentialrechnung veröffentlicht hatte (vgl. Bd. 162 dieser Sammlung). Wir meinen das berühmte Scholion, das auch in der zweiten Auflage der »*Principia*« im wesentlichen unverändert abgedruckt wurde (1713). Dieses Scholion lautet so:

»In Briefen, die ich vor etwa 10 Jahren*) mit dem sehr gelehrten Mathematiker *G. W. Leibniz* wechselte, zeigte ich demselben an, daß ich mich im Besitze einer Methode befände, nach der man Maxima und Minima bestimmen, Tangenten ziehen und ähnliche Aufgaben lösen könne, und zwar lasse sie sich ebensogut auf irrationale wie auf rationale Größen anwenden. Indem ich die Buchstaben der Worte**), die meine Meinung aussprachen, versetzte, verbarg ich dieselbe. Der berühmte Mann antwortete mir darauf, er sei auf eine Methode derselben Art verfallen, die er mir mitteilte, und die von der meinigen kaum weiter abwich als in der Form der Worte und Zeichen«.

In der zweiten Auflage wurde noch darauf hingewiesen, daß *Leibniz* und *Newton* sich die Größen in verschiedener Weise entstanden denken. Es ist in dem obigen Scholion mit klaren Worten zugegeben, daß *Leibniz* ganz unabhängig von *Newton* seine Differentialrechnung erfunden hat. Und es wird auch gesagt, daß *Leibniz* sich ganz offen über seine Methode aussprach, während *Newton* sie noch geheim hielt.

In der dritten Auflage der »*Principia*«, die 1726, also nach *Leibniz'* Tode erschien, findet man das Scholion nicht mehr. An seine Stelle ist vielmehr folgende Bemerkung getreten***):

---

*) Gemeint ist das Jahr 1676.

**) Die Worte lauten: *Data aequatione quotcunque fluentes involvente fluxiones invenire et vice versa.*

***) Wir zitieren (wie auch vorhin) nach *Moritz Cantor.*

»In einem an unsern Landsmann *Collins* gerichteten Brief vom 11. Dezember 1672 beschrieb ich eine Methode der Tangenten, die meiner Vermutung nach mit der damals noch nicht veröffentlichten Methode von *de Sluse* identisch sei. Ich fügte folgende Bemerkung hinzu: Dies ist ein besonderer Fall oder vielmehr ein Zusatz zur allgemeinen Methode, die sich auf jeden mühevollen Kalkül erstreckt, nicht nur auf die Konstruktion von Tangenten an alle geometrischen oder mechanischen Kurven oder von auf andere Kurven sich beziehenden geraden Linien, sondern auch auf die Lösung anderer schwieriger Aufgaben über die Krümmung, Quadratur, Rektifikation, die Schwerpunkte der Kurven u.s.w., und sie beschränkt sich nicht (wie die Methode von *Hudde* für Maxima und Minima) auf diejenigen Gleichungen, die frei von irrationalen Größen sind. Diese Methode habe ich jener andern eingefügt, nach der ich die Gleichungen behandle, indem ich sie auf unendliche Reihen zurückführe. So weit jener Brief. Die letzten Worte beziehen sich auf eine Abhandlung, die ich im Jahre 1671 über diesen Gegenstand geschrieben habe«.

Leibniz wird hier ganz mit Stillschweigen übergangen.

Zwischen der ersten und dritten Auflage liegt der unerquickliche Prioritätsstreit zwischen *Newton* und *Leibniz*, der 1699 anfing und bis zum Tode *Leibniz*ens (1716) und darüber hinaus dauerte. Auch nach dem Tode des Gegners hörten die Anhänger *Newton*s nicht auf zu kämpfen. Erst im 18. Jahrhundert ist durch die Untersuchungen *Gerhardt*s festgestellt worden, daß *Leibniz* ganz unabhängig von *Newton* seine Differentialrechnung erfand und weiterbildete.

Der Streit zwischen *Newton* und *Leibniz* hat auch eine politische Seite. *Leibniz* gehörte zu den Diplomaten, die dem hannöverschen Fürstenhause die Erbfolge in England zu wahren suchten und mit ihren Bemühungen auch Erfolg hatten. *Newton* war im englischen Parlament Mitglied der Partei der Tories, die diese hannöverschen Ansprüche nicht gelten lassen wollten und aufs entschiedenste bekämpften. Jedenfalls trug dieser politische Gegensatz zwischen den beiden großen Männern zur Verschärfung ihrer Feindschaft bei. *Newton* hat übrigens in dem ganzen Prioritätsstreit nie selbst öffentlich das Wort ergriffen. Seitdem er 1696 an der Londoner Münze eine Stellung erhalten hatte und 1699 zum Münzmeister ernannt worden war, hatte er nicht mehr Zeit genug, die Ereignisse in der wissenschaftlichen Welt genau zu verfolgen. Seine große Zurück-

haltung darf man wohl nicht als Hochmut auslegen. Denn wir wissen, wie bescheiden *Newton* sonst war, wie er alle seine großen Entdeckungen mit Muscheln verglich, die ein Kind am Ufer des Meeres findet, das unerforscht und geheimnisvoll vor ihm liegt. Wir wissen auch, daß er 1693 eine Krankheit durchzumachen hatte, die seine geistigen Kräfte stark herabsetzte. Vielleicht wird dadurch manches Befremdliche in *Newton*s Verhalten begreiflicher.

Seit 1703 war *Newton* Vorsitzender der Royal Society. Er wurde jedes Jahr wiedergewählt. 1705 erhob die Königin ihn in den Ritterstand. Er starb 1727.



Anmerkungen.

1) *Zu S. 3.* *Newton* will sich hiermit offenbar in Gegensatz zu *Leibniz* stellen, der schon 1684 seine Differentialrechnung veröffentlicht hatte. Es lag aber *Leibniz* keineswegs fern, die Größen als etwas Fließendes zu betrachten. Er sagt in seiner Arbeit von 1684 an einer Stelle folgendes:

»Der Beweis alles dessen (nämlich der Differentiationsregeln) wird für einen in diesen Dingen Erfahrenen leicht sein, wenn er den bisher nicht genug erwogenen Umstand beachtet, daß man die dx, dy, dv, dw, dz als proportional zu den augenblicklichen Differenzen, d. h. Inkrementen oder Dekrementen, der x, y, v, w, z ... betrachten kann«.

Dem liegt doch augenscheinlich die Vorstellung zugrunde, dass alle Größen Funktionen der Zeit sind. Das aber ist gerade der *Newton*sche Standpunkt. Möglicherweise ist *Leibniz* hier von *Newton* nicht unabhängig.

2) *Zu S. 4.* CET ist in der Grenze das, was *Leibniz* das *triangulum characteristicum inassignabile* nennt. Dieses Dreieck hat auch schon *Pascal* betrachtet, und *Leibniz* lernte es beim Studium *Pascal*s kennen. VBC ist *Leibniz*ens *triangulum characteristicum assignabile.*

3) *Zu S. 4.* Die »letzten Verhältnisse« passen besser zu unserer modernen Definition des Differentialquotienten als des Grenzwerts eines Verhältnisses. Auch im ersten Buch der *Newton*schen »*Principia*« finden sich Andeutungen über die Fluxionsrechnung*). Dort sieht man, wie schwer es *Newton* wird, den Begriff »letztes Verhältnis« einwandsfrei darzulegen. In einer Anmerkung am Schluß des ersten Abschnitts heißt es**).

»Man kann den Einwand machen, daß es kein letztes Verhältnis verschwindender Größen gebe, indem dasselbe vor dem

---

*) Die Bezeichnung $\dot{x}$ gebraucht *Newton* hier noch nicht.

**) Wir entnehmen die Übersetzung *Cantor*s Geschichte der Mathematik.

Verschwinden nicht das letzte sei, nach dem Verschwinden aber überhaupt kein Verhältnis mehr stattfinde. Aus demselben Grunde könnte man aber behaupten, daß ein nach einem bestimmten Orte strebender Körper keine letzte Geschwindigkeit habe; diese sei, bevor er den bestimmten Ort erreicht hat, nicht die letzte, nachdem er ihn erreicht hat, existiere sie garnicht mehr. Die Antwort ist leicht. Unter der letzten Geschwindigkeit versteht man weder diejenige, mit welcher der Körper sich bewegt, ehe er den letzten Ort erreicht und die Bewegung aufhört, noch die nachher stattfindende, sondern in dem Augenblick, wo er den Ort erreicht, ist es die letzte Geschwindigkeit selbst, mit der der Körper den Punkt berührt, und mit der die Bewegung endigt. Auf gleiche Weise hat man unter dem letzten Verhältnis verschwindender Größen das zu verstehen, mit dem sie verschwinden, nicht aber das vor oder nach dem Verschwinden stattfindende. Ebenso ist das erste Verhältnis entstehender Größen das, mit dem sie entstehen. ... Es gibt eine Grenze, die die Geschwindigkeit am Ende erreichen, nicht aber überschreiten kann; dies ist die letzte Geschwindigkeit. Dasselbe gilt von der Grenze aller anfangenden und aufhörenden Größen und Proportionen. Da diese Grenze fest und bestimmbar ist, so ist es eine wahrhaft geometrische Aufgabe, sie aufzusuchen«. Etwas später heißt es dann:

»Jene letzten Verhältnisse, mit denen die Größen verschwinden, sind in Wahrheit nicht die Verhältnisse der letzten Größen, sondern die Grenzen (limites), denen sich die Verhältnisse der unbegrenzt abnehmenden Größen jedesmal nähern, und an die sie näher heran können, als irgend eine gegebene Differenz es ausdrückt. ...«

Newton zieht noch die unendlich zunehmenden Größen heran, um die Sache klarer zu machen.

4) *Zu S. 7.* Das ist das Problem der Integralrechnung.

5) *Zu S. 7.* In den »*Principia*« hat *Newton* diese Bezeichnungsweise noch nicht angegeben. Er scheint nicht so großen Wert auf gute Bezeichnungen gelegt zu haben wie *Leibniz.*

6) *Zu S. 8.* Es wird hier zwischen x, y, z, ... eine algebraische Gleichung

$$f(x, y, z, \ldots) = \Sigma c x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \ldots$$

angenommen und gezeigt, wie man diese differenziert. Das ist ein sehr spezielles Problem, das auch vor *Leibniz* und *Newton*

verschiedentlich behandelt wurde. In der »vollständigen Erklärung« betrachtet *Newton* den Fall, daß zwischen $x, y, z, \ldots$ noch eine andere algebraische Relation besteht. Er bespricht dort auch die mehrfachen Differentiationen.

7) *Zu S. 11.* Es wäre falsch, in dieser neuen Gleichung z als eine beliebige (nicht gleichförmige) Fluente zu betrachten. Dies wird *Newton* auch selbst für unerlaubt gehalten haben. Solange die Fluenten $x, y, z, \ldots$ allgemeiner Natur sind, wird bei den aus $f(x, y, z, \ldots) = 0$ durch Differentiation entstehenden Gleichungen das Homogeneitätsgesetz *Newton*s gelten (wonach die Anzahl der Pünktchen in den einzelnen Gliedern immer dieselbe ist, vorausgesetzt, daß man alle Potenzen in ihre Faktoren auflöst). Um dies Gesetz auch im Falle, daß eine Fluente z gleichförmig ist, noch zu haben, denkt sich *Newton* überall Faktoren $\dot{z}$ in geeigneter Anzahl hinzugefügt. An andern Stellen seiner Schriften greift er sogar, um eine in seinem Sinne inhomogene Differentialgleichung homogen zu machen, zu einer Fluente, die gar nicht in dem Problem auftritt, also eigentlich völlig bedeutunglos ist. Das ist eine Unklarheit. Man weiß jedenfalls nicht, was *Newton* sich dabei gedacht hat.

8) *Zu S. 14.* *Newton*s Verfahren besteht darin,

$$z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}(a_0 + a_1 z^{\eta} + a_2 z^{2\eta} + \cdots),$$

wo

$$R = c_0 + c_1 z^{\eta} + c_2 z^{2\eta} + \cdots$$

ist, auf die Form

$$A_0 \frac{d}{dz}(z^{\vartheta} R^{\lambda}) + A_1 \frac{d}{dz}(z^{\vartheta+\eta} R^{\lambda}) + A_2 \frac{d}{dz}(z^{\vartheta+2\eta} R^{\lambda}) + \cdots$$

zu bringen. Nun findet man

$$\frac{d}{dz}(z^{\vartheta+\varrho\eta} R^{\lambda}) = z^{\vartheta-1+\varrho\eta} R^{\lambda-1}\left\{(\vartheta + \varrho\eta)R + \lambda z \frac{dR}{dz}\right\}$$

$$= z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}\{(\vartheta+\varrho\eta)c_0 z^{\varrho\eta} + (\vartheta+\varrho\eta+\lambda\eta)c_1 z^{(\varrho+1)\eta} + (\vartheta+\varrho\eta+2\lambda\eta)c_2 x^{(\varrho+2)\eta} + \cdots$$

$$(\varrho = 0, 1, 2, \ldots).$$

Der Koeffizient von $z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}z^{\varrho\eta}$ in

$$A_0 \frac{d}{dz}(z^{\vartheta} R^{\lambda}) + A_1 \frac{d}{dz}(z^{\vartheta+\eta} R^{\lambda}) + \cdots$$

lautet also:

$$\sum_{r=0}^{\varrho} A_r\{\vartheta + r\eta + (\varrho - r)\lambda\eta\} c_{\varrho-r}.$$

Er muß gleich a_ϱ sein, so daß man die Gleichungen

$$\sum_{r=0}^{\varrho} A_r\{\vartheta + r\eta + (\varrho - r)\lambda\eta\} c_{\varrho - r} = a_\varrho \qquad (\varrho = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

zu schreiben hat. Aus ihnen ergeben sich der Reihe nach $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,$ vorausgesetzt, daß keine der Zahlen

$$\vartheta c_0,\ (\vartheta + \eta) c_0,\ (\vartheta + 2\eta) c_0,\ \ldots$$

Null ist.

9) *Zu S. 15.* Sollen alle A (in Anm. 8) mit Ausnahme von A_0 verschwinden, so muß sein

$$A_0(\vartheta + \varrho\lambda\eta) c_\varrho = a_\varrho. \quad (\varrho = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn der Ausdruck:

$$z^{-\frac{5}{2}}(k - lz^2 + mz^3)^{-\frac{1}{2}}(3k - lz^2)$$

vorliegt. Hier ist nämlich:

$c_0 = k,\ c_1 = o,\ c_2 = -l,\ c_3 = m$ (alle andern c gleich Null),
$a_0 = 3k,\ a_1 = o,\ a_2 = -l,\ a_3 = o$ (alle andern a gleich Null),

Ferner hat man:

$$\vartheta = -\frac{5}{2} + 1 = -\frac{3}{2}, \quad \lambda = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}, \quad \eta = 1,$$

also

$$\vartheta + \varrho\lambda\eta = -\frac{3}{2} + \varrho\frac{1}{2} = \frac{\varrho - 3}{2}.$$

die Gleichungen

$$A_0(\vartheta + \varrho\lambda\eta) c_\varrho = a_\varrho \quad (\varrho = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

lauten daher:

$$A_0(\varrho - 3) c_\varrho = 2 a_\varrho.$$

Für $\varrho = 3$ und $\varrho > 3$ verschwinden beide Seiten, ebenso für $\varrho = 1$. Für $\varrho = 0$ und $\varrho = 2$ erhält man:

$$-3A_0 k = 6k, \quad A_0 l = -2l.$$

Man muß also $A_0 = -2$ nehmen und hat dann:

$$A_0 z^\vartheta R^\lambda = -2z^{-\frac{3}{2}}(k - lz^2 + mz^3)^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\frac{k - lz^2 + mz^3}{z^3}}.$$

10) *Zu S. 16.* In dem Integral der Funktion treten dann sicher Logarithmen auf. Dies kann aber auch der Fall sein,

wenn der Nenner nur mehrfache Wurzeln hat. Übrigens hatten *Leibniz* und *Bernoulli* schon 1702, also zwei Jahre vor dem Erscheinen der vorliegenden *Newton*schen Schrift allgemein gezeigt, wie man eine rationale Funktion integriert, ihr Nenner mag beschaffen sein, wie er will. Hier haben wir einen Fall, wo *Leibniz* einen wichtigen Fortschritt g a n z u n a b h ä n g i g von *Newton* gemacht hat. Denn *Newton* weiß 1704 noch nicht, wie man eine beliebige rationale Funktion integriert.

11) *Zu S. 17.* R ist der größte gemeinsame Teiler des Nenners und seiner Ableitung.

12) *Zu S. 17.* Es kommt nur dann ein Resultat in endlicher Form heraus, wenn die rationale Funktion die Ableitung einer andern rationalen Funktion ist. So ist auch das Beispiel gewählt.

13) *Zu S. 19.* Dieses Theorem steht in genau derselben Beziehung zu Theorem 2, wie Theorem 3 zu Theorem 1. Es handelt sich um eine Funktion von der Form

$$z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} (a_0 + a_1 z^{\eta} + a_2 z^{2\eta} + \cdots),$$

wobei

$$R = c_0 + c_1 z^{\eta} + c_2 z^{2\eta} + \cdots, \quad S = d_0 + d_1 z^{\eta} + d_2 z^{2\eta} + \cdots$$

ist. Das *Newton*sche Verfahren besteht darin, die angegebene Funktion auf die folgende Form zu bringen:

$$A_0 \frac{d}{dz}(z^{\vartheta} R^{\lambda} S^{\mu}) + A_1 \frac{d}{dz}(z^{\vartheta+\eta} R^{\lambda} S^{\mu}) + A_2 \frac{d}{dz}(z^{\vartheta+2\eta} R^{\lambda} S^{\mu}) + \cdots$$

Nun ist

$$\frac{d}{dz}(z^{\vartheta+\varrho\eta} R^{\lambda} S^{\mu}) =$$

$$= z^{\vartheta-1+\varrho\eta} R^{\eta-1} S^{\mu-1} \left\{(\vartheta + \varrho\eta) RS + \lambda S z \frac{dR}{dz} + \mu R z \frac{dS}{dz}\right\}.$$

Dieser Ausdruck wird, wenn man von dem Faktor $z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1}$ $S^{\mu-1}$ absieht, eine Potenzreihe in z^{η}, die mit $z^{\varrho\eta}$ anfängt, und $z^{\varrho\eta}$ hat den Koeffizienten $(\vartheta + \varrho\eta)\, c_0 d_0$, Es wird also

$$\frac{d}{dz}(z^{\vartheta+\varrho\eta} R^{\lambda} S^{\mu}) = (\vartheta + \varrho\eta) c_0 d_0 z^{\varrho\eta} + f_{\varrho 1} z^{(\varrho+1)\eta} + f_{\varrho 2} z^{(\varrho+2)\eta} + \cdots,$$

wo die f sehr leicht zu berechnen sind. Der Koeffizient von $z^{\varrho\eta}$ in

$$A_0 \frac{d}{dz}(z^\vartheta R^\lambda S^\mu) + A_1 \frac{d}{dz}(z^{\vartheta+\eta} R^\lambda S^\mu) + A_2 \frac{d}{dz}(z^{\vartheta+2\eta} R^\lambda S^\mu) + \cdots$$

wird offenbar lauten:

$$A_\varrho(\vartheta + \varrho\eta)c_0 d_0 + A_{\varrho-1} f_{\varrho-1,1} + \cdots + A_0 f_{0\varrho}.$$

Er muß gleich a_ϱ sein, so daß man folgende Gleichungen hat:

$$A_\varrho(\vartheta + \varrho\eta)c_0 d_0 + A_{\varrho-1} f_{\varrho-1,1} + \cdots + A_0 f_{0\varrho} = a_\varrho$$
$$(\varrho = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Aus ihnen lassen sich A_0, A_1, A_2, ... der Reihe nach bestimmen, vorausgesetzt, daß keine der Größen

$$\vartheta c_0 d_0, \quad (\vartheta + \eta)c_0 d_0, \quad (\vartheta + 2\eta)c_0 d_0, \ \ldots$$

Null ist.

14) *Zu S. 20.* Der nächste Fall wäre der, daß die zu integrierende Funktion die folgende Form hat:

$$z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1} T^{\nu-1}(a_0 + a_1 z^\eta + a_2 z^{2\eta} + \cdots),$$

wobei R, S, T gleich:

$$c_0 + c_1 z^\eta + c_2 z^{2\eta} + \cdots,\ d_0 + d_1 z^\eta + d_2 z^{2\eta} + \cdots,\ e_0 + e_1 z^\eta + e_2 z^{2\eta} + \cdots$$

sind. In diesem Falle müßte man die vorgelegte Funktion auf die Form

$$A_0 \frac{d}{dz}(z^\vartheta R^\lambda S^\mu T^\nu) + A_1 \frac{d}{dz}(z^{\vartheta+\eta} R^\lambda S^\mu T^\nu) + A_2 \frac{d}{dz}(z^{\vartheta+2\eta} R^\lambda S^\mu T^\nu) + \cdots$$

bringen.

15) *Zu S. 21.* Es wird hier (um es etwas anders als *Newton* auszudrücken) bewiesen, daß im Falle eines trinomischen R,

$$R = e + f z^\eta + g z^{2\eta}$$

zwischen den Integralen

$$\int z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1} dz, \quad \int z^{\vartheta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz, \quad \int z^{\vartheta+2\eta-1} R^{\lambda-1} dz$$

eine Relation von folgender Form besteht:

$$p \int z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1} dz + q \int z^{\vartheta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz + r \int z^{\vartheta+2\eta-1} R^{\lambda-1} dz = z^\vartheta R^\lambda.$$

Durch Differentiation ergibt sich in der Tat:

$$z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1}(p + q z^\eta + r z^{2\eta})$$
$$= z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1}\{\vartheta e + (\vartheta + \lambda\eta) f z^\eta + (\vartheta + 2\lambda\eta) g z^{2\eta}\}.$$

Es genügt also

$$p = \vartheta e, \quad q = (\vartheta + \lambda\eta)f, \quad r = (\vartheta + 2\lambda\eta)g$$

zu setzen.

16) *Zu S. 22.* Es ist nicht klar zu verstehen, was *Newton* hier meint. Wahrscheinlich will er sagen, daß z. B. im Falle $\vartheta + 2\lambda\eta = 0$ nicht von

$$A = \int z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}dz\,, \qquad B = \int z^{\vartheta+\eta-1}R^{\lambda-1}dz$$

ausgegangen werden kann, weil sich dann

$$C = \int z^{\vartheta+2\eta-1}R^{\lambda-1}dz$$

nicht aus der Formel

$$pA + qB + rC = z^{\vartheta}R^{\lambda}$$

berechnen läßt, während in diesem Falle B und C als Anfangsglieder zu brauchen sind.

17) *Zu S. 23.* p, q, a, b werden das eine Mal so bestimmt, daß

$$p\int z^{\vartheta-1}R^{\lambda}dz + q\int z^{\vartheta+\eta-1}R^{\lambda}dz + az^{\vartheta}R^{\lambda} + bz^{\vartheta+\eta}R^{\lambda} = \int z^{\vartheta+\eta-1}R^{\lambda-1}dz$$

wird, das andere Mal so, daß

$$p\int z^{\vartheta-1}R^{\lambda}dz + q\int z^{\vartheta+\eta-1}R^{\lambda}dz + az^{\vartheta}R^{\lambda} + bz^{\vartheta+\eta}R^{\lambda} = \int z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}dz$$

wird. Aus zwei Integralen, in denen R^{λ} steht, werden auf diese Weise Integrale berechnet, in denen $R^{\lambda-1}$ steht.

18) *Zu S. 25.* R und S seien z. B. Binome, also:

$$R = e + fz^{\eta}, \quad S = k + lz^{\eta}.$$

Dann lassen sich zunächst p, q, r so bestimmen, daß

$$A = \int z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}dz, \qquad B = \int z^{\vartheta+\eta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}dz,$$
$$C = \int z^{\vartheta+2\eta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}dz$$

die Gleichung

$$pA + qB + cC = z^{\vartheta}R^{\lambda}S^{\mu}$$

erfüllen. Durch Differentiation ergibt sich nämlich

$$z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}(p + qz^{\eta} + rz^{2\eta})$$
$$= z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}\left(\vartheta RS + \lambda Sz\frac{dR}{dz} + \mu Rz\frac{dS}{dz}\right)$$
$$= z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}\{\vartheta ek + [(\vartheta+\mu\eta)le + (\vartheta+\lambda\eta)fk]z^{\eta} + (\vartheta+\lambda\eta+\mu\eta)flz^{2\eta}$$

Man braucht also nur

$$p = \vartheta e k,\quad q = (\vartheta + \mu\eta) l e + (\vartheta + \lambda\eta) f k,\quad r = (\vartheta + \lambda\eta + \mu\eta) f l$$

zu nehmen.

In ähnlicher Weise überzeugt man sich von der Richtigkeit der übrigen Behauptungen des Theorems.

19) *Zu S. 25.* Aus $du = dv$ folgt zunächst nur $u - v =$ Konst. In den einzelnen Folgerungen des Theorems 7 führt *Newton* neue Veränderliche in Integrale ein. Es sind aber nur spezielle Fälle, die er behandelt.

20) *Zu S. 44.* *Newton* geht hier von einer Funktion $f(z)$ aus und bildet der Reihe nach:

$$f_1(z) = \int_0^z f(z)\,dz,\quad f_2(z) = \int_0^z f_1(z)\,dz,\quad f_3(z) = \int_0^z f_2(z)\,dz,\quad \ldots$$

Ferner setzt er

$$A = \int_0^t f(z)\,dz,\quad B = \int_0^t z f(z)\,dz,\quad C = \int_0^t z^2 f(z)\,dz,\ \ldots$$

und außerdem

$$P = \int_0^t f(z)\,dz,\quad Q = \int_0^t (t - z) f(z)\,dz,\quad R = \int_0^t (t - z)^2 f(z)\,dz,\ \ldots;$$

t ist eine gegebene Abszisse.

Der Beweis der von *Newton* in Theorem 8 angegebenen Formeln gelingt durch partielle Integration.

Z. B. wird die Formel

$$\text{Fläche } AEKC = tA - B = Q$$

so bewiesen. Man hat

$$\text{Fläche } AEKC = \int_0^t f_1(z)\,dz = \{z f_1(z)\}_0^t - \int_0^t z f_1'(z)\,dz$$

oder, da

$$f_1(t) = \int_0^t f(z)\,dz \quad \text{und} \quad f_1'(z) = f(z)$$

ist,

$$\text{Fläche } AEKC = tA - B.$$

Andererseits ist aber:

$$Q = \int_0^t (t - z) f(z)\,dz = t\int_0^t f(z)\,dz - \int_0^t z f(z)\,dz = tA - B.$$

Um die Formel

$$\text{Fläche } AFLC = \frac{t^2 A - 2tB + C}{2} = \frac{1}{2} R$$

zu beweisen, bemerkt man, daß

$$\text{Fläche } AFLC = \int_0^t f_2(z)dz = \{zf_2(z)\}_0^t - \int_0^t zf_2'(z)dz$$

$$= t\,(\text{Fläche } AEKC) - \int_0^t zf_1(z)dz$$

ist. Andererseits hat man aber

$$\int_0^t zf_1(z)dz = \left\{\frac{z^2}{2} f_1(z)\right\}_0^t - \int_0^t \frac{z^2}{2} f_1'(z)dz$$

$$= \frac{t^2}{2} A - \frac{1}{2} C,$$

also schließlich:

$$\text{Fläche } AFLC = t(tA - B) - \frac{t^2}{2} A + \frac{1}{2} C = \frac{t^2 - 2tB + C}{2}.$$

Es ist aber auch:

$$\tfrac{1}{2} R = \tfrac{1}{2} \int_0^t (t-z)^2 f(z)dz = \frac{t^2 \int_0^t f(z)dz - 2t\int_0^t zf(z)dz + \int_0^t z^2 f(z)}{2}$$

$$= \frac{t^2 - 2tB + C}{2}.$$

So geht es weiter.

21) *Zu S. 46.* Die von *Newton* als erstes, zweites, drittes, ... Inkrement angegebenen Ausdrücke sind, damit die Angaben richtig werden, noch bezüglich mit

$$1!,\ 2!,\ 3!,\ \ldots$$

zu multiplizieren.

22) *Zu S. 47.* *Newton* integriert hier Differentialgleichungen von der Form:

$$y^{(n)} = f(x).$$

23) *Zu S. 47.* Hier betrachtet *Newton* Differentialgleichungen von der Form

$$f(y,\ y') = 0$$

und allgemeiner solche von der Form

$$f(y^{(n)}, \quad y^{(n+1)}) = 0$$

und zeigt, daß sie sich durch Quadraturen integrieren lassen. Dann behandelt er noch einige Differentialgleichungen, die auf diese Form zurückgeführt werden können.

Bonn, November 1907.

Gerhard Kowalewski.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Nr. 83. **Jacob Steiner.** II. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) M 2.40.

» 90. **A. Bravais,** Abhandlung über die Systeme von regelmäßig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) M 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet,** Untersuch. über verschiedene Anwendungen d. Infinitesimalanalysis auf d. Zahlentheorie. (1839—1840.) Deutsch herausgeg. von R. Haussner. (128 S.) M 2.—.

» 93. **Leonhard Euler,** Drei Abhandlungen üb. Kartenprojection. (1777.) Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) M 1.20.

» 99. **R. Clausius,** Über die bewegende Kraft d. Wärme. (1850.) Herausg. von Max Planck. Mit 4 Textfiguren. (55 S.) M —.80.

» 101. **G. Kirchhoff,** Abhandlung über mechanische Wärmetheorie: 1. Ein Satz der mechan. Wärmetheorie u. Anwendung. (1858.) 2. Spannung d. Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. (1858.) — 3. Spannungen d. Dampfes von Mischungen aus Wasser u. Schwefelsäure. Herausg. v. Max Planck. (48 S.) M —.75.

» 102. **James Clerk Maxwell,** Über physikal. Kraftlinien. Herausgeg. von L. Boltzmann. Mit 12 Textfiguren. (147 S.) M 2.40.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. v. Oettingen, herausgeg. von H. Weber. (171 S.) M 2.60.

» 106. **D'Alembert,** Dynamik. (1743.) Übersetzt und herausgegeben von Arthur Korn. Mit 4 Tafeln. (210 S.) M 3.60.

» 107. **Jakob Bernoulli,** Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ars conjectandi.) (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgeg. von R. Haussner. Mit 1 Textfigur. (162 S.) M 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Textfig. (172 S.) M 2.70.

» 109. **Riccardo Felici,** Mathematische Theorie der electro-dynamischen Induction. Übersetzt von B. Dessau. Herausgeg. von E. Wiedemann. (121 S.) M 1.80.

» 111. **N. H. Abel,** Abhandl. über eine besond. Klasse algebraisch. auflösb. Gleichungen. Herausg. von Alfred Loewy. (50 S.) M —.90.

» 112. **Augustin-Louis Cauchy,** Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. (1825.) Herausgeg. von P. Stäckel. (80 S.) M 1.25.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandl. zur Theorie d. partiellen Differentialgleich. erster Ordnung. Aus d. Französ. übers. und herausgeg. von Gerhard Kowalewski. (54 S.) M 1.—.

» 116. **Lejeune Dirichlet,** Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) u. **Philipp Ludwig Seidel,** Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuierl. Functionen darstellen (1847). Herausgegeben v. Heinrich Siebmann. (58 S.) M 1.—.

» 117. **Gaspard Monge,** Darstellende Geometrie. (1798.) Übersetzt und herausg. von Robert Haussner. Mit zahlreichen Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (217 S.) M 4.—.

» 122. **Carl Friedrich Gauss,** Sechs Beweise des Fundamentaltheorems über quadrat. Reste. Herausg. v. Eugen Netto. (111 S.) M 1.80.

» 123. **Jacob Steiner,** Einige geometrische Betrachtungen. (1826.) Herausgegeben von Rudolf Sturm. Mit 46 Figuren im Texte u. in den Anmerkungen. (125 S.) M 2.—.

Nr. 124. **H. Helmholtz**, Abhandlungen zur The
von Max Planck. (84 S.) ℳ 1.40.

» 127. **Jean Baptiste Joseph Baron Fourie**
Gleich. (Analyse des équations déterminées.) (IV u. 262 S.) ℳ 4.—.

» 129. **Johann Friedrich Pfaff**, Allgemeine Methode, partielle Differentialgleichungen zu integriren. (1815.) Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgeg. von Gerhard Kowalewski. (84 S.) ℳ 1.40.

» 130. **N. J. Lobatschefskij**, Pangeometrie. (Kasan 1856.) Übers. u. herausgeg. von Heinrich Liebmann. Mit 30 Textfiguren. (95 S.) ℳ 1.70.

» 133. **J. H. Lambert**, Bahnbestimmung der Cometen. Herausgegeben von J. Bauschinger. Mit 35 Textfiguren. (149 S.) ℳ 2.40.

» 135. **C. F. Gauss**, Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustand des Gleichgewichts. (1829.) Übers. v. Rudolf H. Weber. Herausg. v. H. Weber. Mit 1 Textfigur. (73 S.) ℳ 1.20.

» 138. **Christian Huygens**, Bewegung der Körper durch d. Stoß. Centrifugalkraft. Herausgeg. von Felix Hausdorff. Mit 49 Textfiguren. (79 S.) ℳ 1.40.

» 141. **J. F. Encke**, Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen. — **P. A. Hansen**, Über d. Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Herausg. von J. Bauschinger. (162 S.) ℳ 2.50.

» 143. **C. Sturm**, Abhandl. über die Auflösung d. numerischen Gleichungen. (1835.) Aus dem Französischen übersetzt u. herausgeg. v. Alfred Loewy. (66 S.) ℳ 1.20.

» 144. **Johannes Kepler**, Dioptrik. (Augsburg 1611.) Übersetzt und herausgeg. v. Ferdinand Plehn. Mit 43 Textfiguren. (114 S.) ℳ 2.—.

» 146. **Joseph Louis Lagrange**, Über die Lös. d. unbestimmten Probleme zweiten Grades. (1768.) Aus dem Französischen übersetzt und herausgeg. von Eugen Netto. (131 S.) ℳ 2.20.

» 151. **L. Poinsot** (1809), **A. L. Cauchy** (1811), **J. Bertrand** (1858), **A. Cayley** (1859), Abhandlungen über die regelmäßigen Sternkörper. Übersetzt und herausgegeben von Robert Haußner. Mit 58 Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (128 S.) ℳ 2.80.

» 153. **Bernard Bolzano**, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. — **Hermann Hankel**, Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen. Herausgegeben von Philip E. B. Jourdain. (115 S.) ℳ 1.80.

» 155. **Quintino Sella**, Abhandlungen zur Kristallographie. Herausgeg von F. Zambonini in Neapel. Mit 8 Fig. im Text. (44 S.) ℳ —.80.

» 156. **C. G. J. Jacobi**, Neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl von Veränderlichen. Herausgegeben von G. Kowalewski. (227 S.) ℳ 4.—.

» 162. **Leibniz** Analysis des Unendlichen. Aus d. Latein. übers. u. herausgeg. von Gerhard Kowalewski. Mit 9 Textfiguren. (84 S.) ℳ 1.60.

» 164. **Newtons** Abhandlung über die Quadratur der Kurven (1704). Aus d. Lateinischen übersetzt und herausgegeben von G. Kowalewski. Mit 8 Textfiguren. (66 S.) ℳ 1.50.

» 165. **Johannes Kepler**, Neue Stereometrie der Fässer, besonders der in der Form am meisten geeigneten österreichischen, und Gebrauch der kubischen Visierrute. Mit einer Ergänzung zur Stereometrie des Archimedes. (1615.) Aus d. Latein. übers. u. herausgeg. von R. Klug. Mit 29 Textfiguren. (130 S.) ℳ 2.60.